

ریاضی پیش دانشگاهی

مؤلف : فریا فرمیتنی

عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی

واحد قشم

مقدمه

ریاضی بازتابی از قوانین خلقت است. ریاضی معیار درست اندیشیدن است. ریاضی به ذهن انسان خلاقیت خاص می‌بخشد و قابلیت اندیشه و قدرت اندیشیدن را افزایش می‌دهد. آنان که مفهوم ریاضی را درک می‌کنند می‌توانند هر حرکت و هر تشکلی را در قالب ریاضی ببینند.

افرادی که با ریاضی سر و کار دارند، نظم کاری و اخلاق و سرشت خاصی را دارا هستند. با بررسی دقیق و نگارش‌های ژرف ریاضی، شاید بتوان گفت، ریاضی عبارت است از تراوش ظریف بنیادی و زیر بنایی معیار شده از تمرکز انسان.

پیش‌گفتار

این کتاب بر اساس نیاز دانشجویان مقاطع کارشناسی و کاردانی رشته‌های علوم انسانی در درس ریاضی پیش‌دانشگاهی تألیف شده است.

درمورد این کتاب نکات زیر شایان ذکر است:

- اساتید محترم می‌توانند متناسب با هر مقطع و رشته، به تدریس بخش‌ها، بیان مثال‌ها و حل تمرین‌ها از کتاب بپردازند.

- پس از تعریف هر مفهوم ریاضی مثال‌های متعددی حل گردیده تا دانشجویان الگوهای مختلفی برای حل مسائل داشته باشند.

- با توجه به این که این کتاب برای درس پیش‌دانشگاهی تألیف شده، از اثبات قضایا صرف نظر شده و تاکید بیشتری روی حل مسائل شده است.

- درک عمیق مطالب ریاضی و تسلط بر آن با حل مسئله، تمرین و تکرار زیاد امکان پذیر است، لذا برای هر بخش تمرین‌های فراوانی انتخاب شده است.

در مجموع هدف نویسنده این بوده است که درسنامه‌ای مناسب برای ریاضی پیش‌دانشگاهی ارائه شود. از آن جا که این مجموعه خالی از ایراد و اشکال نمی‌باشد، لذا نظرات اصلاحی خوانندگان مورد استقبال این جانب قرار خواهد گرفت.

فریبا فرمیتنی

تابستان ۹۸

فهرست مطالب

فصل اول: نظریه‌ی مجموعه‌ها.....	۱
۱-۱ مفهوم مجموعه.....	۱
۲-۱ روش نمایش مجموعه‌ها.....	۲
۳-۱ زیر مجموعه‌های یک مجموعه.....	۵
۴-۱ مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه.....	۱۰
۵-۱ اعمال روی مجموعه‌ها.....	۱۱
۶-۱ محاسبه عدد اصلی مجموعه‌های متناهی.....	۱۸
۷-۱ حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه.....	۱۹
۸-۱ بازه‌ها.....	۲۱
فصل دوم: توان و رادیکال.....	۲۵
۱-۲ توان و عملیات مربوط به آن.....	۲۵
۲-۲ خواص توان‌ها.....	۲۷
۳-۲ رادیکال.....	۳۱
۴-۲ توان‌های کسری.....	۳۱
۵-۲ خواص رادیکال.....	۳۲
۶-۲ جمع جبری رادیکال‌ها.....	۳۳
۷-۲ ضرب عدد در رادیکال.....	۳۴
۸-۲ ضرب و تقسیم فرجه بر عدد.....	۳۴
۹-۲ تعیین فرجه مشترک.....	۳۵
۱۰-۲ ضرب و تقسیم رادیکال‌ها.....	۳۶
فصل سوم: عبارات جبری.....	۳۹
۱-۳ چندجمله‌ای‌ها.....	۳۹
۲-۳ درجه یک جمله‌ای.....	۴۰

۴۰.....	۳-۳ جمع جبری یک جمله‌ای‌ها.....
۴۱.....	۴-۳ ضرب و تقسیم یک جمله‌ای‌ها.....
۴۱.....	۵-۳ به توان رساندن یک جمله‌ای‌ها.....
۴۲.....	۶-۳ چند جمله‌ای‌ها.....
۴۲.....	۷-۳ درجه چند جمله‌ای‌ها.....
۴۳.....	۸-۳ جمع جبری چند جمله‌ای‌ها.....
۴۳.....	۹-۳ ضرب چند جمله‌ای‌ها.....
۴۴.....	۱۰-۳ تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای.....
۴۵.....	۱۱-۳ تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای.....
۴۹.....	۱۲-۳ اتحادها.....
۵۷.....	۱۳-۳ تجزیه چند جمله‌ای‌ها.....
۵۷.....	۱۴-۳ تجزیه به کمک فاکتورگیری.....
۵۸.....	۱۵-۳ تجزیه به کمک اتحادها.....
۵۹.....	۱۶-۳ تجزیه به کمک دسته بندی.....
۶۱.....	۱۷-۳ تجزیه به وسیله افزودن و کاستن.....
۶۲.....	۱۸-۳ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک.....
۶۵.....	۱۹-۳ عبارت‌های گویا و اعمال روی آن‌ها.....
۶۵.....	۲۰-۳ ساده کردن عبارات گویا.....
۶۶.....	۲۱-۳ ضرب عبارت‌های گویا.....
۶۷.....	۲۲-۳ جمع و تفریق عبارت‌های گویا.....
۶۹.....	۲۳-۳ تقسیم عبارات گویا.....
۷۱.....	۲۴-۳ کسرهاى مرکب.....
۷۵.....	۲۵-۳ گویا کردن مخرج کسرها.....
۷۹.....	فصل چهارم: معادلات و نامعادلات جبری.....
۷۹.....	۱-۴ معادله یک مجهولی درجه اول.....
۸۰.....	۲-۴ روش کلی حل معادله درجه اول.....
۸۳.....	۳-۴ نامعادله درجه اول یک مجهولی.....
۸۷.....	۴-۴ تعیین علامت عبارت درجه اول.....

۵-۴	معادلات گویا.....	۹۵
۶-۴	دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول.....	۹۷
۷-۴	روش حذفی.....	۹۸
۸-۴	روش کلی حل معادله درجه دوم.....	۱۰۳
۹-۴	تعیین علامت عبارت جبری درجه دوم.....	۱۰۷
۱۰-۴	روش حل نامعادله غیر درجه اول.....	۱۱۴
۱۱-۴	قدر مطلق.....	۱۱۸
۱۲-۴	خواص قدر مطلق.....	۱۲۰
۱۳-۴	حل معادلات و نامعادلات شامل قدر مطلق.....	۱۲۲
۱۴-۴	معادلات گنگ.....	۱۲۷
۱۵-۴	روش حل معادلات گنگ.....	۱۲۷

فصل پنجم: هندسه تحلیلی..... ۱۲۹

۱-۵	دستگاه مختصات دکارتی.....	۱۲۹
۲-۵	شیب خط.....	۱۳۳
۳-۵	معادله خط.....	۱۳۵
۴-۵	وضعیت دو خط نسبت به یکدیگر.....	۱۳۹
۵-۵	فاصله نقطه از خط.....	۱۴۵
۶-۵	دایره.....	۱۴۷
۷-۵	سهمی.....	۱۴۹

فصل ششم: مثلثات..... ۱۵۷

۱-۶	زاویه و مقیاس اندازه گیری زاویه.....	۱۵۸
۲-۶	دایره مثلثاتی.....	۱۶۱
۳-۶	نسبت های مثلثاتی.....	۱۶۱
۴-۶	محورهای مثلثاتی.....	۱۶۳
۵-۶	محاسبه نسبت های مثلثاتی یک زاویه حاده.....	۱۶۶
۶-۶	روابط اصلی بین نسبت های مثلثاتی.....	۱۷۰
۷-۶	روابط بین نسبت های مثلثاتی بعضی از زاویه ها.....	۱۷۳
۸-۶	معادلات مثلثاتی.....	۱۸۳

فصل هفتم: تابع.....	۱۸۹
۱-۷ رابطه.....	۱۸۹
۲-۷ مفهوم تابع.....	۱۹۰
۳-۷ تشخیص تابع از روی نمودار.....	۱۹۶
۴-۷ معرفی چند تابع خاص.....	۱۹۶
۵-۷ تعیین دامنه و برد توابع به کمک نمودار.....	۱۹۹
۶-۷ نکاتی در مورد تعیین دامنه توابع.....	۲۰۲
۷-۷ رسم توابع به کمک انتقال.....	۲۰۸
۸-۷ تابع زوج و فرد.....	۲۱۳
۹-۷ تابع یک به یک.....	۲۱۷
۱۰-۷ تابع پوششی.....	۲۲۰
۱۱-۷ اعمال روی توابع.....	۲۲۲
۱۲-۷ ترکیب توابع.....	۲۲۴
۱۳-۷ تساوی دوتابع.....	۲۲۶
۱۴-۷ تابع معکوس.....	۲۲۹
۱۵-۷ تابع متناوب.....	۲۳۵
۱۶-۷ توابع مثلثاتی.....	۲۳۷
۱۷-۷ توابع معکوس مثلثاتی.....	۲۴۲
۱۸-۷ تابع نمایی.....	۲۴۹
۱۹-۷ تابع لگاریتمی.....	۲۵۲
۲۰-۷ تابع نمایی طبیعی.....	۲۵۸

فصل اول: نظریه‌ی مجموعه‌ها

در نظریه مجموعه‌ها، مجموعه چنان مفهوم بنیادی دارد که تاکنون تعریف رسمی برای آن ارائه نشده است و آن را به صورت مجموعه‌ای از اشیاء معین و دوه‌دو متمایز توصیف می‌کنند. این تعریف اولین بار توسط جورج کانتور که در سال ۱۹۸۵ نظریه‌ی مجموعه‌ها را پایه‌گذاری نمود، بیان شده است. در این فصل به تعریف مجموعه و بیان خواص آن می‌پردازیم.

۱-۱ مفهوم مجموعه

۱-۱-۱ تعریف: هر گروه مشخص از اشیاء دو به دو متمایز را مجموعه و هر یک از اعضا آن را یک عضو این مجموعه می‌نامند. منظور از مشخص بودن اعضای یک مجموعه آن است که آیا هر شیء مفروض، متعلق به این مجموعه هست یا خیر؟
مثال ۱: روزهای زوج هفته، پایتخت کشورهای اروپایی و دانشجویان دانشگاه آزاد، به دلیل مشخص و متمایز بودن اعضا یک مجموعه را تشکیل می‌دهند.

مثال ۲: چهار عدد طبیعی و زوج که متوالی هم باشند مجموعه‌ای تشکیل نمی‌دهند؛ زیرا اعضا آن مشخص نمی‌باشند. همچنین دانشجویان خوب نیز یک مجموعه نمی‌باشند؛ زیرا تعریف مشخصی برای دانشجویان خوب نداریم.

معمولاً مجموعه را با یکی از حروف بزرگ لاتین A ، B ، ... و Z نمایش داده و اعضای آن را با حروف کوچک مانند a ، b ، ... و Z نشان می دهیم. تعلق عضو a به مجموعه A را با نماد $\in$ و عدم تعلق آن را با نماد $\notin$ نشان می دهیم.

مثال ۳: اگر $A = \{1, \{3\}, 4\}$ ، آن گاه: $1 \in A$ ، $\{3\} \in A$ ، $4 \in A$ ولی $3 \notin A$.

۲-۱ روش نمایش مجموعه ها

مجموعه ها را به سه طریق می توان نمایش داد:

الف: نمایش مجموعه ها به روش تفصیلی

برای نمایش یک مجموعه در صورتی که تعداد اعضای آن متناهی باشد می توان عضوها را در داخل دو ابرو $\{ \}$ قرار داده و با یک «،» از یکدیگر جدا کرد. اگر تعداد عضوها نامتناهی باشد، پس از نوشتن چند عضو سه نقطه می گذاریم.

مثال ۴: اگر A مجموعه اعداد فرد کوچکتر از ۱۰ باشد، آن گاه آن را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

مثال ۵: اگر A مجموعه اعداد زوج مثبت باشد، آن گاه آن را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$A = \{2, 4, 6, \dots\}$$

مثال ۶: اگر A مجموعه اعداد اول (اعدادی که فقط بر یک و خودش بخش پذیر هستند) باشد، آن گاه آن را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$$

معرفی چند مجموعه خاص:

(۱) مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

(۲) مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(۳) مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

(۴) مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

(۵) مجموعه اعداد اصم: این مجموعه شامل تمام اعدادی است که بسط اعشاری آن‌ها بی‌پایان است و متناوب نیستند.

(۶) مجموعه اعداد حقیقی: این مجموعه را با $\mathbb{R}$ نشان داده که شامل تمام اعداد گویا و غیرگویا (اصم) می‌باشد.

مثال ۷: چند عضو $\mathbb{Q}$ عبارتند از $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, -\frac{7}{11}$ ، با توجه به این که هر عدد صحیح را می‌توان به صورت کسری با مخرج ۱ در نظر گرفت، (مثلاً) می‌توان ۸ را به صورت $\frac{8}{1}$ نوشت؛ لذا هر عدد صحیح یک عدد گویا با مخرج یک است.

همچنین هر عدد گویا را می‌توان به صورت یک عدد اعشاری (پایان‌دار یا بی‌پایان با جزء تکراری) نوشت. مثلاً می‌توان 0.6 را به صورت $\frac{6}{10}$ نوشت که عدد اعشاری پایان‌دار و $0.\overline{6}$ را می‌توان به صورت $\frac{2}{3}$ نوشت که عدد اعشاری بی‌پایان با جزء تکراری است.

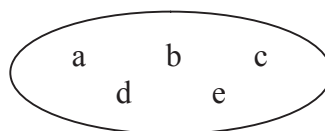
مثال ۸: اعداد $\sqrt{2} = 1/41421356\dots$ و $\pi = 3/14159265\dots$ اصم هستند.

مثال ۹: چند عضو $\mathbb{R}$ عبارتند از $\frac{2}{5}, \sqrt{5}, \frac{2}{17}, \sqrt[4]{4}, 0.\overline{52}, 2/17$.

ب: نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون

در این حالت اعضای یک مجموعه را در داخل یک مستطیل، دایره یا هر منحنی بسته دیگر قرار می‌دهیم.

مثال ۱۰: اگر A مجموعه حروف a, b, c, d و e باشد، آن‌گاه آن را به وسیله نمودار ون^(۱) به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



ج: نمایش مجموعه‌ها با استفاده از علائم ریاضی

برای نمایش مجموعه‌هایی که دارای خاصیت معینی هستند می‌توان با استفاده از علائم ریاضی آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$\{x \mid x \text{ دارای خاصیت معینی است} \mid x\}$$

مثال ۱۱: اگر A مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۷۵ باشد، آن‌گاه می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } x < 75\}$$

مثال ۱۲: اعضا مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } 2x - 10 < 0\}$ را بیابید.

حل: اگر $2x - 10 < 0$ ، آن‌گاه داریم: $2x < 10$. لذا نتیجه می‌گیریم که $x < 5$ و $x \in \mathbb{N}$. بنابراین داریم:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

^(۱) venn diagram

مثال ۱۳: اعضا مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } x^2 - 4 = 0\}$ را بیابید.

حل: اگر $x^2 - 4 = 0$ ، آن‌گاه داریم: $x^2 = 4$. از این رو نتیجه می‌گیریم $x = \pm 2$ و $x \in \mathbb{Z}$. لذا داریم:

$$A = \{-2, 2\}$$

مثال ۱۴: اعضا مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{W} \text{ و } x^3 - x = 0\}$ را بیابید.

حل: اگر $x^3 - x = 0$ ، آن‌گاه داریم: $x(x^2 - 1) = 0$. از این رو نتیجه می‌گیریم $x = 0$ و $x = \pm 1$. از آن جایی که $x \in \mathbb{W}$ ، لذا داریم:

$$A = \{0, 1\}$$

۱-۲-۱ تعریف: مجموعه‌ای را که هیچ عضوی نداشته باشد، تهی نامیده و آن را با نماد ϕ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.

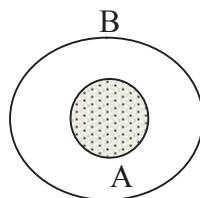
مثال ۱۵: مجموعه اعداد طبیعی بین ۲ و ۳ تهی است.

مثال ۱۶: مجموعه افرادی که قد آن‌ها بیش از ۶ متر باشد تهی است.

مثال ۱۷: اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ و } x^2 + 1 = 0\}$ ، آن‌گاه $A = \phi$.

۳-۱ زیرمجموعه‌های یک مجموعه

۱-۳-۱ تعریف: مجموعه A را زیرمجموعه B گوئیم، هر گاه هر عضو A عضو B باشد. زیرمجموعه بودن را با نماد $\subseteq$ نشان می‌دهیم و نمودار آن به صورت زیر می‌باشد:

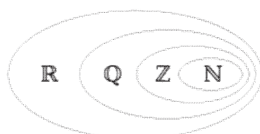


اگر حداقل یک عضو در A باشد که در B نباشد، آن گاه گوییم A زیرمجموعه B نیست و آن را با نماد $\not\subseteq$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۸: با توجه به تعریف زیرمجموعه داریم:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

نمودار ون رابطه فوق به صورت زیر می‌باشد:



۱-۳-۲ تعریف: هر گاه مجموعه A زیرمجموعه B باشد و $A \neq B$ ، آن گاه A را زیرمجموعه سره B گوییم و آن را با نماد $\subset$ نشان می‌دهیم. توجه کنید تمام زیرمجموعه‌های مجموعه B ، به جز B زیرمجموعه سره B هستند.

مثال ۱۹: فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی زوج باشد، دراین صورت A زیرمجموعه سره $\mathbb{N}$ است.

۱-۳-۱ نکته: هر مجموعه زیرمجموعه خودش می‌باشد. به عبارت دیگر، به ازای هر مجموعه دلخواه مانند A داریم $A \subseteq A$.

۱-۳-۲ نکته: تهی زیرمجموعه هر مجموعه است. به عبارت دیگر، به ازای هر مجموعه دلخواه مانند A داریم $\emptyset \subseteq A$.

مثال ۲۰: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، آن گاه چون هر عضو A در خودش است $A \subseteq A$ و از آن جایی که نمی‌توان هیچ عضوی در تهی پیدا کرد که در A نباشد، مجموعه تهی زیرمجموعه A می‌باشد.

مثال ۲۱: تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{a, b\}$ را بنویسید.

حل: این مجموعه چهار زیرمجموعه به صورت زیر دارد:

$$\{a, b\}, \{b\}, \{a\}, \{\}$$

مثال ۲۲: تمام زیرمجموعه‌های $B = \{c, \{d\}, e\}$ را بنویسید.

حل: این مجموعه هشت زیرمجموعه به صورت زیر دارد:

$$\{\}, \{c\}, \{\{d\}\}, \{e\}, \{c, \{d\}\}, \{c, e\}, \{\{d\}, e\}, \{c, \{d\}, e\}$$

۱-۳-۳ تعریف: مجموعه تمام زیرمجموعه‌های A را مجموعه توانی A نامیده و با نماد $p(A)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲۳: مجموعه توانی مجموعه $B = \{1, \{2, 3\}, 3\}$ را بنویسید.

حل:

$$p(B) = \{\{\}, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{3\}, \{1, \{2, 3\}\}, \{1, 3\}, \{\{2, 3\}, 3\}, \{1, \{2, 3\}, 3\}\}$$

مثال ۲۴: $p(p(\phi))$ را تشکیل دهید.

حل: مجموعه توانی تهی برابر است با $\{\phi\}$ و مجموعه توانی $\{\phi\}$ برابر است با $\{\phi, \{\phi\}\}$.

در مثال‌های فوق دیدیم مجموعه ۲ عضوی A دارای ۴ زیرمجموعه و مجموعه ۳ عضوی B دارای ۸ زیرمجموعه هست؛ پس به طور کلی می‌توان گفت:

۱-۳-۳ نکته: اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، آن‌گاه مجموعه زیرمجموعه‌های A دارای 2^n عضو است.

مثال ۲۵: مجموعه A دارای ۶۴ زیرمجموعه است. تعداد اعضا مجموعه A را به دست آورید.

حل: با توجه به نکته ۱-۳-۳ داریم: $2^n = 64$. از این رو نتیجه می‌گیریم $2^n = 2^6$. بنابراین تعداد اعضا مجموعه A برابر با ۶ است.

مثال ۲۶: اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n+1$ عضوی، ۳۲ زیرمجموعه کمتر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n+2$ عضوی باشد، n را مشخص کنید.

حل: بنا به نکته ۱-۳-۳، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n+1$ عضوی برابر 2^{n+1} و تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n+2$ عضوی برابر 2^{n+2} می‌باشد. پس بنا به فرض مسئله داریم $2^{n+2} - 2^{n+1} = 32$ ؛ در نتیجه $2^{n+1} = 32$. با فاکتورگیری از عامل مشترک 2^n نتیجه می‌گیریم که $2^n(2^2 - 2) = 2^5$. لذا داریم $2^n = 2^4$. بنابراین $n = 4$.

۱-۳-۴ تعریف: دو مجموعه A و B را مساوی گوییم، اگر هر عضو A در B و هر عضو B در A باشد. در صورتی که A و B برابر نباشند، می‌نویسیم $A \neq B$.

۱-۳-۴ نکته: در یک مجموعه تکرار اعضا بی اثر است و ترتیب اعضا نیز مهم نیست.

مثال ۲۷: دو مجموعه $A = \{1, 2, 5, 4\}$ و $B = \{2, 1, 4, 5\}$ با هم مساویند.

مثال ۲۸: دو مجموعه $A = \{a, \{b\}, c, a\}$ و $B = \{c, \{b\}, a\}$ با هم مساویند.

۱-۳-۵ نکته: به ازای سه مجموعه دلخواه A ، B و C ، اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آن‌گاه داریم $A \subseteq C$.

۱-۳-۶ نکته: به ازای سه مجموعه دلخواه A ، B و C ، اگر $A = B$ و $B = C$ ، آن‌گاه داریم $A = C$.

تمرین

(۱) کدام یک از عبارات زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

الف: اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۶ ب: شعرای معروف ایران

ج: حروف بدون نقطه الفبای فارسی د: مردم مهربان ایران

(۲) مجموعه‌های داده شده را با اعضایشان مشخص کنید.

الف: مجموعه اعداد اول کمتر از ۲۴

ب: مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۳

ج: مجموعه مقسوم علیه‌های مثبت عدد ۳۴

(۳) تمام زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{a, c, d, e\}$ را بنویسید.

(۴) مجموعه توانی مجموعه $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ را بنویسید.

(۵) مجموعه‌های $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}$ و $B = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ و $C = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ را در

نظر گرفته، تعیین کنید کدام یک از عبارتهای زیر درست است؟

الف: $\emptyset \subseteq A$ ب: $\emptyset \in A$ ج: $\{\emptyset\} \subseteq B$

د: $\{\emptyset\} \in C$ ه: $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\} \in C$ و: $\{\emptyset\} \subseteq A$

(۶) اعضاء مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x - 4 = 0\}$

$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 - 9x = 0\}$ $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -x^2 > 0\}$

(۷) دو مجموعه A و B روی هم ۱۴ عضو دارند. اگر تعداد زیرمجموعه‌های

مجموعه A شانزده برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه B باشد، مجموعه B چند

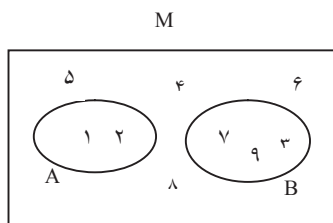
عضو دارد؟

۴-۱ مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

۴-۱-۱ تعریف: هر مجموعه را می‌توان به عنوان زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه ثابت در نظر گرفت، این مجموعه را مجموعه مرجع یا جهانی نامیده و آن را با M نمایش می‌دهیم.

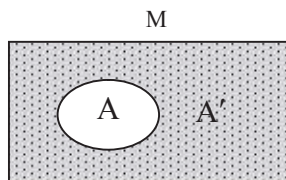
۴-۱-۱ نکته: در نمایش نمودار ون، معمولاً مجموعه مرجع را به شکل یک مستطیل نشان می‌دهند و زیرمجموعه‌های آن را با دایره‌هایی در درون آن مستطیل رسم می‌کنند.

مثال ۲۹: اگر $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ و $A = \{1, 2\}$ و $B = \{3, 7, 9\}$ ، آن‌گاه نمودار ون این مجموعه‌ها به صورت زیر می‌باشد:



۴-۱-۲ تعریف: اگر A زیر مجموعه دلخواهی از مجموعه مرجع M باشد، متمم مجموعه A را با A' نشان می‌دهند که عبارت است از مجموعه تمام عضوهای از M که در A نباشند. به عبارت دیگر:

$$A' = \{x \mid x \in M \text{ و } x \notin A\}$$



قسمت خاکستری در نمودار ون، نشان دهنده متمم مجموعه A می‌باشد.

مثال ۳۰: اگر مجموعه مرجع، مجموعه اعداد طبیعی و A مجموعه اعداد زوج باشد، متمم مجموعه A مجموعه اعداد فرد است.

مثال ۳۱: اگر $M = \{a, \{b, c\}, d, e, f, b, c\}$ و $A = \{b, c, f\}$ ، آن‌گاه متمم مجموعه A برابر است با:

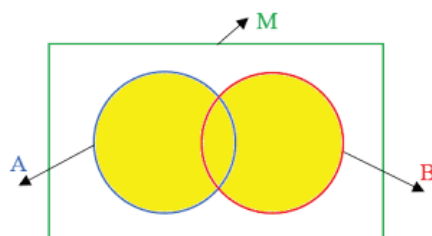
$$A' = \{a, \{b, c\}, d, e\}$$

۱-۵ اعمال روی مجموعه‌ها

۱-۵-۱ تعریف: اجتماع دو مجموعه A و B را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهند که عبارت است از مجموعه‌ای که اعضاء آن به A یا B تعلق دارند. به بیان دیگر:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

بخش خاکستری رنگ نمودار ون اجتماع دو مجموعه A و B را نشان می‌دهد.



مثال ۳۲: اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{a, b, \{\}, d, e\}$ ، آن‌گاه داریم:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, \{\}, e\}$$

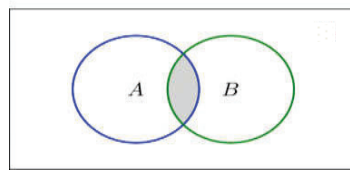
مثال ۳۳: اگر $A = \{۲, ۳, ۶, ۸\}$ و $B = \{۱, \{۲, ۳\}, \{\}, ۶, ۹\}$ ، آن‌گاه داریم:

$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, \{۲, ۳\}, ۶, \{\}, ۸, ۹\}$$

۱-۵-۲ تعریف: اشتراک دو مجموعه A و B را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهند که عبارت است از مجموعه عضوهای مشترک A و B . به بیان دیگر:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

بخش خاکستری رنگ نمودار ون، اشتراک دو مجموعه A و B را نشان می‌دهد.



مثال ۳۴: اگر $A = \{2, 4, 6, 8\}$ و $B = \{2, 3, \{4, 5\}, 6, 7, 9\}$ ، آن‌گاه:

$$A \cap B = \{2, 6\}$$

مثال ۳۵: اشتراک مجموعه $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } (x+3)(x-1)(x-2) = 0\}$

و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } -2 \leq x \leq 2\}$ را به دست آورید.

حل: اگر $(x+3)(x-1)(x-2) = 0$ ، آن‌گاه داریم: $x = -3$ ، $x = 1$ و

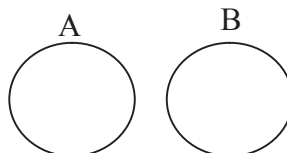
$x = 2$. از آن جایی که $x \in \mathbb{N}$ ، نتیجه می‌گیریم که $A = \{1, 2\}$.

از طرفی داریم: $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. لذا داریم:

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

۱-۵-۳ تعریف: اگر $A \cap B = \emptyset$ ، آن‌گاه دو مجموعه A و B را جدا از هم

می‌نامیم.

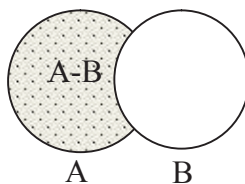


مثال ۳۶: مجموعه اعداد زوج و مجموعه اعداد فرد، دو مجموعه جدا از هم هستند.

مثال ۳۷: اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ و } x < -1\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ و } x > 2\}$ ، آن‌گاه A و B دو مجموعه جدا از هم هستند.

۱-۵-۴ تعریف: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، تفاضل B از A را با نماد $A - B$ نمایش می‌دهند و عبارت است از مجموعه تمام عضوهای A که به B تعلق ندارند. به عبارت دیگر:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$



قسمت خاکستری در نمودار ون نشان دهنده تفاضل مجموعه B از A می‌باشد.

مثال ۳۸: اگر $A = \{2, 3, 7, 8\}$ و $B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ ، آن‌گاه:

$$A - B = \{2, 8\} \quad \text{و} \quad B - A = \{1, 4, 5, 6, 9\}$$

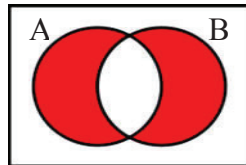
۱-۵-۱ نکته: در حالت کلی داریم:

$$A - B = A \cap B'$$

۱-۵-۵ تعریف: فرض کنیم A و B دو مجموعه دلخواه باشند، مجموعه تمام عضوهای A که تنها به A تعلق دارند تفاضل متقارن A و B نامیده و با نماد $A \Delta B$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

قسمت خاکستری در نمودار ون، نشان دهنده تفاضل متقارن دو مجموعه A و B می باشد.



مثال ۳۹: فرض کنیم $A = \{1, 2, \{3\}, 4, 5\}$ و $B = \{1, \{3\}, \{4, 5\}, 6, 7, 9\}$ ، آن گاه:

$$A - B = \{2, 4, 5\} \quad \text{و} \quad B - A = \{\{4, 5\}, 6, 7, 9\}$$

لذا تفاضل متقارن A و B برابر است با:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{2, 4, 5, \{4, 5\}, 6, 7, 9\}$$

مثال ۴۰: اگر $M = \{a, b, c, d, \{c, d\}, e, \{\}, f, g, \{g\}\}$ ، $A = \{a, b, c, d\}$ ، $B = \{c, d, \{c, d\}, f\}$ و $C = \{e, f, \{c, d\}, \{\}\}$ ، مطلوب است:

الف: $(A \cup B) \cap C$

ب: B'

ج: $(A - C) \cup B$

د: $A \Delta B$

ه: $(A \cup B \cup C)'$

و: $(A \cap B)' - C$

حل:

الف:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, \{c, d\}, f\}$$

$$(A \cup B) \cap C = \{\{c, d\}, f\}$$

ب:

$$B' = \{a, b, e, \{\}, g, \{g\}\}$$

ج:

$$A - C = \{a, b, c, d\} - \{e, f, \{c, d\}, \{\}\} = \{a, b, c, d\}$$

$$(A - C) \cup B = \{a, b, c, d, \{c, d\}, f\}$$

د:

$$A - B = \{a, b, c, d\} - \{c, d, \{c, d\}, f\} = \{a, b\}$$

$$B - A = \{c, d, \{c, d\}, f\} - \{a, b, c, d\} = \{\{c, d\}, f\}$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{a, b, \{c, d\}, f\}$$

ه:

$$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, \{c, d\}, e, \{\}, f\}$$

$$(A \cup B \cup C)' = \{g, \{g\}\}$$

و:

$$A \cap B = \{c, d\}$$

$$(A \cap B)' = \{a, b, \{c, d\}, e, \{\}, f, g, \{g\}\}$$

$$(A \cap B)' - C = \{a, b, \{c, d\}, e, \{\}, f, g, \{g\}\} - \{e, f, \{c, d\}, \{\}\}$$

$$= \{a, b, g, \{g\}\}$$

۱-۵-۲ نکته: با استفاده از تعاریف بیان شده، نتایج زیر را برای هر دو مجموعه

دلخواه A, B و مجموعه مرجع M داریم:

$$۱) A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

$$۲) A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

$$۳) A \cap A = A$$

$$۴) A \cap \phi = \phi$$

$$۵) A \cap M = A$$

$$۶) A \cap A' = \phi$$

$$۷) A \cup A = A$$

$$۸) A \cup \phi = A$$

$$۹) A \cup M = M$$

$$۱۰) A \cup A' = M$$

$$۱۱) \phi' = M$$

$$۱۲) M' = \phi$$

$$۱۳) (A')' = A$$

۱-۵-۳ نکته: اگر A ، B و C سه مجموعه دلخواه باشند، آن گاه خواص زیر را

داریم:

الف: خاصیت جابجایی:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

ب: خاصیت شرکت پذیری:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

ج: خاصیت توزیع پذیری:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

د: قوانین دمورگان:^(۱)

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

مثال ۴۱: اگر $M = \{a, b, c, d, e, \{f\}, f, g\}$ ، $A = \{a, b, \{f\}, g\}$ و $B = \{c, d, \{f\}, f\}$ ، آن گاه نشان دهید:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{الف} \quad A \cap A' = \emptyset \quad \text{ب} \quad (B')' = B \quad \text{ج}$$

حل:

الف:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, \{f\}, f, g\} \quad , \quad (A \cup B)' = \{e\} \quad (۱)$$

$$A' = \{c, d, e, f\}, \quad B' = \{a, b, e, g\} \quad \text{و} \quad A' \cap B' = \{e\} \quad (۲)$$

با توجه به تساوی های (۱) و (۲)، قسمت "الف" اثبات می شود.

^{۱)} De Morgan's laws

ب:

$$A \cap A' = \{a, b, \{f\}, g\} \cap \{c, d, e, f\} = \emptyset$$

ج:

$$B' = \{a, b, e, g\}$$

$$(B')' = \{c, d, \{f\}, f\} = B$$

مثال ۴۲: تساوی $(A \cup M')' \cup (A \cup \phi)' = A'$ را ثابت کنید.

حل: با توجه به قانون دمورگان و نکته ۱-۵-۲ داریم:

$$\begin{aligned} (A \cup M')' \cup (A \cup \phi)' &= (A \cup \phi)' \cup (A \cup M)' = A' \cup M' = A' \cup \phi \\ &= A' \end{aligned}$$

مثال ۴۳: تساوی $(B - A) \cup (A - B') = B$ را ثابت کنید.

حل: با توجه به تعریف تفاضل دو مجموعه و نکات ۱-۵-۲ و ۱-۵-۳ داریم:

$$\begin{aligned} (B - A) \cup (A - B') &= (B \cap A') \cup (A \cap (B')') \\ &= (B \cap A') \cup (A \cap B) \\ &= B \cap (A' \cup A) \\ &= B \cap M = B \end{aligned}$$

مثال ۴۴: تساوی $(A \cap (A' \cup B)) \cup (B' \cap (A \cup B)) = A$ را ثابت کنید.

حل: با توجه به خاصیت توزیع پذیری و نکته ۱-۵-۲ داریم:

$$\begin{aligned} &(A \cap (A' \cup B)) \cup (B' \cap (A \cup B)) \\ &= ((A \cap A') \cup (A \cap B)) \cup ((B' \cap A) \cup (B' \cap B)) \\ &= (\phi \cup (A \cap B)) \cup (B' \cap A) \cup \phi \\ &= (A \cap B) \cup (B' \cap A) \\ &= A \cap (B \cup B') \\ &= A \cap M = A \end{aligned}$$

۱-۶ محاسبه عدد اصلی مجموعه‌های متناهی

۱-۶-۱ تعریف: مجموعه متناهی مجموعه‌ای است که تعداد عضوهای آن محدود و معین باشد. تعداد اعضا یک مجموعه متناهی مانند A را عدد اصلی آن مجموعه نامیده و با $n(A)$ نشان می‌دهیم. بدیهی است عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی تعریف نشده است.

۱-۶-۱ نکته: اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، آن‌گاه عدد اصلی اجتماع این دو مجموعه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

مثال ۴۵: هرگاه A و B دو مجموعه با تعداد عناصر به ترتیب ۴ و ۸ باشند، و $A \cap B = \{2, 3, 5\}$ ، تعداد عناصر مجموعه $A \cup B$ را بیابید.

حل: $n(A \cap B) = 3$. با توجه به نکته ۱-۶-۱ داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

پس داریم:

$$n(A \cup B) = 4 + 8 - 3 = 9$$

مثال ۴۶: هرگاه تعداد عناصر مجموعه‌های A ، B و $A \cup B$ به ترتیب ۸ و ۱۲ و ۱۷ باشد، تعداد عناصر مجموعه $A \cap B$ را به دست آورید.

حل: با توجه به نکته ۱-۶-۱ داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

از این‌رو داریم:

$$17 = 8 + 12 - n(A \cap B)$$

بنابراین:

$$n(A \cap B) = 3$$

۷-۱ حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه

۱-۷-۱ تعریف: هرگاه بین دو شیء a و b ترتیب در نظر بگیریم، آن را زوج مرتب نامیده و با نماد (a, b) نمایش داده می‌شود. a را مؤلفه اول و b را مؤلفه دوم می‌نامیم.

۲-۷-۱ تعریف: حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه A و B را با نماد $A \times B$ نمایش داده و عبارت است از مجموعه تمام زوج‌های مرتب (a, b) ، به طوری که a عضوی از A و b عضوی از B باشد. به عبارت دیگر:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ و } b \in B\}$$

مثال ۴۷: فرض کنید $A = \{1, 2\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، در این صورت داریم:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

مثال ۴۸: اگر $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{a, b\}$ ، آن‌گاه:

$$A \times B = \{(2, a), (2, b), (4, a), (4, b), (6, a), (6, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 2), (a, 4), (a, 6), (b, 2), (b, 4), (b, 6)\}$$

همان‌طور که در مثال بالا ملاحظه می‌کنید $A \times B \neq B \times A$.

مثال ۴۹: اگر $A = \{2k \mid k \in \mathbb{N} \text{ و } 1 \leq k \leq 2\}$

و $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } x^2 < 25\}$ ، آن‌گاه مطلوب است محاسبه $A \times B$ و $B \times A$.

حل: داریم:

$$A = \{2, 4\} \text{ و } B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$B \times A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$$

تمرین

(۱) اگر $A = \{1, \{2\}, 4, 5, 6, 8, 9\}$ ، $B = \{2, 3, 4, 8\}$ ، $C = \{1, 3, 5, 8\}$ و $M = \{1, 2, \{2\}, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، آن گاه مطلوب است:

الف: $A \cup B$ ب: $M \cap C$ ج: $A - B$

د: $B - A$ ه: $(A - B) \cap C$ و: $B' \cap C'$

ز: $C - (B - A)$ ح: $(C - B) - A$

(۲) با مفروضات تمرین (۱)، نشان دهید:

الف: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ب: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ج: $A \cup A' = M$

د: $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$

(۳) اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{\{x\}, y, z\}$ ، آن گاه مطلوب است محاسبه $A \times B$ و $B \times A$.

(۴) اگر $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N} \text{ و } 3 \leq k \leq 5\}$ و $B = \{2k \mid k \in \mathbb{N} \text{ و } 1 \leq k \leq 3\}$ ، مطلوب است محاسبه $A \times B$ و $B \times A$.

(۵) اگر $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ، متمم مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف: $A = \{a, c, e, g\}$ ب: $B = \{b, d, g\}$

ج: $C = \{\}$ د: $D = M$

(۶) متمم مجموعه $((A - B) - A) \cup ((A \cap B) - A)$ را به دست آورید.

(۷) درستی تساوی $(A \cap B) - (A \cap B') = A \cap B$ را ثابت کنید.

(۸) درستی تساوی $A - (A \cap B) = A - B$ را ثابت کنید.

(۹) هرگاه $A \cap B = \emptyset$ ، ثابت کنید $A \Delta B = A \cup B$.

(۱۰) درستی تساوی $(A \cup B' \cup C') \cap (A \cup (B \cap C)) = A$ را ثابت کنید.

(۱۱) هرگاه تعداد عناصر مجموعه‌های A ، B و $A \cap B$ به ترتیب ۶، ۵ و ۲ باشد، تعداد عناصر مجموعه $A \cup B$ را به دست آورید.

۸-۱ بازه‌ها

یکی از نمادهایی که در مجموعه اعداد حقیقی زیاد از آن استفاده خواهیم کرد، بازه‌ها است. در این قسمت به این مفاهیم اشاره می‌کنیم.

۱-۸-۱ تعریف: فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a < b$.

بازه باز a و b را با علامت (a, b) نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

روی محور x ها بازه باز (a, b) را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



۲-۸-۱ تعریف: با فرض $a < b$ ، بازه بسته a و b را با نماد $[a, b]$ نشان داده و

به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

روی محور x ها بازه بسته $[a, b]$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



۳-۸-۱ تعریف: بازه نیمه باز از سمت چپ را با علامت $(a, b]$ نشان داده و به

صورت داده شده را تعریف می‌کنیم:

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

روی محور x ها فاصله $(a, b]$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



۴-۸-۱ تعریف: بازه نیمه باز از سمت راست را با علامت $[a, b)$ نشان داده و به

صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

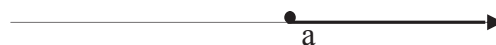
روی محور x ها فاصله $[a, b)$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:



۵-۸-۱ تعریف: با استفاده از مفهوم بازه‌های باز یا بسته می‌توان مجموعه‌های زیر

را نمایش داد:

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\} \quad \text{الف:}$$



$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\} \quad \text{ب:}$$



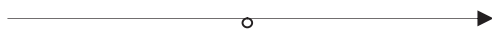
$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\} \quad \text{ج:}$$



$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\} \quad \text{د:}$$



ه: نماد $(-\infty, +\infty)$ نشان دهنده تمام اعداد حقیقی است.



مثال ۵۰: هر یک از مجموعه‌های داده شده را به صورت بازه نوشته و سپس آن‌ها را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

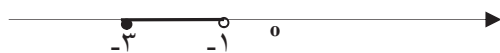
$$\text{الف: } \{x \mid -3 \leq x < -1\} \quad \text{ب: } \{x \mid x < -2\} \cup \{x \mid x \geq 3\}$$

$$\text{ج: } \{x \mid x > 2\} \cap \{x \mid x < 6\} \quad \text{د: } \{x \mid x \leq 0\} \cup \{x \mid x \geq 2\}$$

حل:

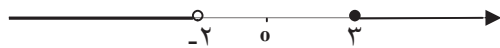
الف:

$$\{x \mid -3 \leq x < -1\} = [-3, -1)$$



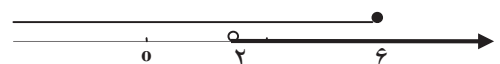
ب:

$$\{x \mid x < -2\} \cup \{x \mid x \geq 3\} = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$$



ج:

$$\{x \mid x > 2\} \cap \{x \mid x \leq 6\} = (2, +\infty) \cap (-\infty, 6] = (2, 6]$$



:د

$$\{x | x \leq 0\} \cup \{x | x \geq 2\} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$



تمرین

هر یک از مجموعه‌های داده شده را به صورت بازه نوشته، سپس آن‌ها را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

$$۱) \{x | -۸ \leq x \leq 0\}$$

$$۲) \{x | -۵ \leq x < ۲\}$$

$$۳) \{x | x \geq ۳\}$$

$$۴) \{x | x \leq ۱\}$$

$$۵) \{x | x < ۱\} \cup \{x | x \geq -۴\}$$

$$۶) \{x | x > -۱\} \cap \{x | x \leq -۵\}$$

$$۷) \{x | x \leq ۴\} \cap \{x | x \geq ۴\}$$

$$۸) \{x | x < 0\} \cup \{x | x \geq 0\}$$

بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش داده، سپس هر یک از آن‌ها را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

$$۹) [-۲, ۵)$$

$$۱۰) (۴, ۱۰)$$

$$۱۱) [-۳, ۸]$$

$$۱۲) (۲, ۴]$$

$$۱۳) [-۱, +\infty)$$

$$۱۴) (0, +\infty)$$

$$۱۵) (-\infty, ۴)$$

$$۱۶) (-\infty, ۱]$$

$$۱۷) (-\infty, ۵) \cup [-۱0, +\infty)$$

$$۱۸) [0, +\infty) \cap (-\infty, ۶)$$

$$۱۹) (0, +\infty) \cap (-\infty, -۱]$$

$$۲۰) (-\infty, ۲] \cup [۴, +\infty)$$

فصل دوم: توان و رادیکال

بابلی‌ها اولین مردمانی بودند که از توان استفاده کردند. در سواحل رود فرات تابلوهای گلی با محاسبات ریاضی پیدا شده است. توان در ریاضی نوعی ساده‌نویسی است که برای حاصل ضرب چند عدد متساوی در یکدیگر به کار می‌رود. توان عملی در ریاضیات است که در بسیاری علوم مانند اقتصاد، زیست‌شناسی، شیمی، فیزیک و علم رایانه استفاده می‌شود.

۱-۲ توان و عملیات مربوط به آن

۱-۱-۲ تعریف: فرض کنید a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد، لذا داریم:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ مرتبه}}$$

و می‌خوانیم a به توان n . مقدار a را پایه و n را توان می‌نامیم.

مثال ۱:

$$5^2 = 5 \times 5$$

$$(7)^4 = (7) \times (7) \times (7) \times (7) = 2401$$

$$(3x)^3 = (3x) \times (3x) \times (3x) = 27x^3$$

۲-۱-۲ تعریف: هرگاه a یک عدد حقیقی مخالف صفر باشد، تعریف می‌کنیم:

$$a^0 = 1$$

و می‌گوییم که هر عدد مخالف صفر اگر به توان صفر برسد، آن‌گاه حاصل برابر با ۱ است.

مثال ۲:

$$7^0 = 1 \qquad (\sqrt{2})^0 = 1$$

۲-۱-۳ تعریف: اگر n یک عدد طبیعی و a یک عدد مخالف صفر باشد، داریم:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

یعنی هر عدد با توان منفی را می‌توان به صورت عکس آن عدد با توان مثبت نوشت.

مثال ۳:

$$x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$a^{-7} = \frac{1}{a^7}$$

$$8^{-2} = \frac{1}{64}$$

۲-۲ خواص توان‌ها

۲-۲-۱ نکته: اگر a و b اعداد حقیقی و m و n اعداد صحیح باشند، آن‌گاه:

(فرض کنید مخرج کسرها همگی مخالف صفر باشند.)

$$۱) a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$۲) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$۳) (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$۴) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$۵) (a^n)^m = a^{nm}$$

۲-۲-۲ نکته: توجه کنید $(-۲)^۴$ و $-۲^۴$ با هم تفاوت دارند. در $(-۲)^۴$ توان ۴ هم برای عدد ۲ و هم برای علامت منفی است، در حالی که در $-۲^۴$ ، توان فقط برای عدد ۲ می‌باشد. لذا:

$$(-۲)^۴ = ۱۶ \quad \text{و} \quad ۲^۴ = -(۲^۴) = -۱۶$$

همین طور در $(۳X)^۳$ ، پرانتز نشان می‌دهد که توان هم برای X و هم برای عدد ۳ می‌باشد، در حالی که در $۳X^۳$ ، توان فقط برای X می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$(۳X)^۳ = (۳)^۳ (X)^۳ = ۲۷ X^۳ \quad \text{و} \quad ۳X^۳ = ۳(X)^۳$$

مثال ۴: حاصل عبارات داده شده را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

حل: با توجه به نکته ۲-۲-۱ داریم:

$$۱) ۴^۲ \times ۴^۷ = ۴^۹$$

$$۲) ۳^۲ \times ۵^۲ = (۳ \times ۵)^۲ = ۱۵^۲$$

$$۳) \frac{۷^۴}{۷^۲} = ۷^{۴-۲} = ۷^۲$$

$$۴) \left(\frac{۵}{۱۱}\right)^۳ \times \left(\frac{۵}{۱۱}\right)^۲ = \left(\frac{۵}{۱۱}\right)^۵$$

$$۵) (۳^{-۲})^۴ = ۳^{-۸}$$

$$۶) (۲^۳)^۶ = ۲^{۱۸}$$

$$۷) (۲^{-۴} \times ۵^{-۴})^{-۱} = (۱۰^{-۴})^{-۱} = ۱۰^۴$$

مثال ۵: عبارات داده شده را ساده کنید و حاصل را به صورت توان مثبت بنویسید.

حل: با توجه به نکته ۱-۲-۲ داریم:

$$۱) ۵^۷ + ۵^۷ + ۵^۷ + ۵^۷ + ۵^۷ = ۵ \times ۵^۷ = ۵^۸$$

$$۲) (-۲ab^۳)(۳a^۲b^۴) = -۶(a)(a^۲)(b^۳)(b^۴) = -۶a^۳b^۷$$

$$۳) ۲a(va^۲b^{-۴})^۰ = ۲a(۱) = ۲a$$

$$۴) (۳a^۲b^{-۴}c^۷)^۵(۳a^۲b^{-۴}c^۷)^{-۵} = (۳a^۲b^{-۴}c^۷)^۰ = ۱$$

$$۵) (۳a^۲b^{-۳}c^۴)^۴ = ۸۱a^۸b^{-۱۲}c^{۱۶} = ۸۱a^۸ \frac{1}{b^{۱۲}} c^{۱۶}$$

$$۶) (a^{۱-n}a^n)^{-۲} = (a^{۱-n+n})^{-۲} = (a^۱)^{-۲} = a^{-۲} = \frac{1}{a^۲}$$

$$۷) [(۳^{-۲})^۴]^۵ \times (۳^۳)^۲ = (۳^{-۸})^۵ \times ۳^۶ = ۳^{-۴۰} \times ۳^۶ = ۳^{-۳۴} = \frac{1}{۳^{۳۴}}$$

$$۸) (x^۳)^۲ \times (x^۲)^۵ \times (y^۲)^۸ = x^۶ \times x^{۱۰} \times y^{۱۶} = x^{۱۶} \times y^{۱۶} \\ = (xy)^{۱۶}$$

$$۹) \frac{(۴ac^{-۲})^۰}{۲^{-۴}} = \frac{۱}{۲^{-۴}} = ۲^۴ = ۱۶$$

$$۱۰) \left(\frac{\Delta x^۲ y^۳}{z^۴}\right)^۲ = \frac{(\Delta x^۲ y^۳)^۲}{(z^۴)^۲} = \frac{\Delta^۲ (x^۲)^۲ (y^۳)^۲}{(z^۴)^۲} = \frac{۲\Delta x^۴ y^۶}{z^۸}$$

$$۱۱) \frac{a^{\Delta} b^{\epsilon} c^{\gamma}}{a^{\gamma} b^{\gamma} c^{\epsilon}} = \frac{a^{\gamma}}{b^{\gamma} c^{\gamma}}$$

$$۱۲) \left(\frac{x^{\epsilon} y^{-\gamma}}{z^{\Delta}} \right)^{-\gamma} = \frac{x^{-\gamma} (x^{\epsilon})^{-\gamma} (y^{-\gamma})^{-\gamma}}{(z^{\Delta})^{-\gamma}} = \frac{\left(\frac{1}{x^{\gamma}} \right) x^{-\Delta} y^{\epsilon}}{z^{-10}} = \frac{z^{10} y^{\epsilon}}{x^{\Delta}}$$

$$۱۳) \frac{(a^{\gamma} b^{\epsilon})^{\gamma} (a^{-\gamma} b^{-\gamma})^{-\gamma}}{(\gamma a^{\gamma} b^{-\epsilon} c^{\gamma})^{\gamma}} = \frac{a^{\epsilon} b^{\Delta} a^{\epsilon} b^{\epsilon}}{\Delta a^{\gamma} b^{-12} c^{21}} = \frac{a^{10} b^{12}}{\Delta a^{\gamma} b^{-12} c^{21}} = \frac{ab^{2\epsilon}}{\Delta c^{21}}$$

$$۱۴) \frac{(\gamma a^{\gamma} b^{-\gamma} c^{\gamma})^{\epsilon}}{(a^{\gamma} b^{\gamma})^{\gamma} (a^{-1} b^{-1})^{-1}} = \frac{\gamma^{\epsilon} a^{12} b^{-\Delta} c^{12}}{a^{\epsilon} b^{\epsilon} ab} = \frac{\gamma^{\epsilon} a^{12} b^{-\Delta} c^{12}}{a^{\gamma} b^{\gamma}} \\ = \frac{\Delta a^{\Delta} c^{12}}{b^{1\Delta}}$$

$$۱۵) \frac{9^{\gamma} \times 27^{\Delta}}{\Delta 1^{-\gamma} \times 9^{\gamma}} = \frac{(\gamma^{\gamma})^{\gamma} \times (\gamma^{\gamma})^{\Delta}}{(\gamma^{\epsilon})^{-\gamma} \times (\gamma^{\gamma})^{\gamma}} = \frac{\gamma^{\epsilon} \times \gamma^{1\Delta}}{\gamma^{-2\Delta} \times \gamma^{\epsilon}} = \frac{\gamma^{21}}{\gamma^{-2\epsilon}} \\ = \gamma^{21} \times \gamma^{2\epsilon} \\ = \gamma^{4\Delta}$$

$$۱۶) \frac{\Delta^{\epsilon} \times 2\Delta^{\Delta}}{4^{\Delta} \times 3\Delta^{\epsilon}} = \frac{\Delta^{\epsilon} \times (\gamma \times \gamma^{\gamma})^{\Delta}}{(\gamma^{\gamma})^{\Delta} \times (\Delta \times \gamma)^{\epsilon}} = \frac{\Delta^{\epsilon} \times \gamma^{\Delta} \times \gamma^{10}}{\gamma^{10} \times \Delta^{\epsilon} \times \gamma^{\epsilon}} = \gamma$$

$$۱۷) \frac{2\Delta^{\epsilon} \times 27^{\gamma} \times 12^{\epsilon}}{21^{\Delta} \times 1\Delta^{-\gamma} \times \Delta^{\epsilon}} = \frac{(\gamma \times \gamma^{\gamma})^{\epsilon} \times (\gamma^{\gamma})^{\gamma} \times (\gamma \times \gamma^{\gamma})^{\epsilon}}{(\gamma \times \gamma)^{\Delta} \times (\gamma^{\gamma} \times \gamma)^{-\gamma} \times (\gamma^{\gamma})^{\epsilon}} \\ = \frac{\gamma^{\epsilon} \times \gamma^{\Delta} \times \gamma^{\epsilon} \times \gamma^{\epsilon} \times \gamma^{\Delta}}{\gamma^{\Delta} \times \gamma^{\Delta} \times \gamma^{-\epsilon} \times \gamma^{-\gamma} \times \gamma^{12}} \\ = \frac{\gamma^{\epsilon} \times \gamma^{16} \times \gamma^{12}}{\gamma^{\Delta} \times \gamma^1 \times \gamma^{10}} \\ = \frac{\gamma^{\epsilon} \times \gamma^{12}}{\gamma}$$

تمرین

عبارات داده شده را ساده کنید و حاصل را به صورت توان مثبت بنویسید.

۱) $5(x^3)^2$

۲) $(4x^3y^2)^3$

۳) $\frac{15^7}{3 \times 45^4}$

۴) $\frac{(-4)^0}{3^{-2}}$

۵) $(3x^2y^{-3})^2(2x^4y^7)$

۶) $(a^2b^{-3}c^2)^{-5}$

۷) $\frac{264 \times 4^8}{2^4 \times 18^5 \times 64^{-2}}$

۸) $\frac{a^{-2}b^3c^{-2}}{2a^3b^{-3}c^{-3}}$

۹) $\frac{36^3 \times 24^3 \times 72^3}{18^2 \times 12^3 \times 96^5}$

۱۰) $[(x^{-2})^3]^7 \times (y^{21})^{-2}$

۱۱) $\frac{105^5 \times 35^4}{21^6 \times 5^7}$

۱۲) $\frac{3 \times 45^6}{15^6 \times 3^7}$

۱۳) $\left(\frac{x^4y^2z^{-7}}{x^6y^{-3}z^{-4}}\right)^{-3}$

۱۴) $\frac{21^{10} \times 18^5 \times 18^3}{12^4 \times 27^4 \times 28^8}$

۱۵) $\frac{(\delta^{100} + \delta^{100} + \delta^{100})^5}{(\gamma^{100} + \gamma^{100} + \gamma^{100} + \gamma^{100} + \gamma^{100})^5}$

۱۶) $(12 \times 8)^{-2} \times (30 \times 15)^2 \times (10)^{-3}$

۱۷) $4^{10} + 4^{10} + 4^{10} + 4^{20}$

۱۸) مقدار X و Y را از رابطه $\frac{18^2 \times 12^3 \times 96^5}{36^3 \times 24^3 \times 72^3} = 2^X \times 3^Y$ محاسبه کنید.

۱۹) حاصل عبارت $\frac{(3 \times 4)^3}{24^2} + 24\left(\frac{-1}{3}\right)^3\left(\frac{9}{2}\right)^2$ را محاسبه کنید.

۲-۳ رادیکال

۲-۳-۱ تعریف: فرض کنید n عددی طبیعی و a و b اعداد حقیقی و نامنفی باشند و یا اگر n عددی فرد و a و b اعداد حقیقی منفی باشند، در این صورت ریشه n ام اصلی عدد b به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b$$

به n فرجه رادیکال می‌گوییم.

قرارداد: اگر فرجه رادیکال ۲ باشد، از نوشتن فرجه صرفه‌نظر می‌کنیم.

مثال ۶:

$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt[5]{32} = 2$
$\sqrt{-27} = -3$	$-\sqrt{64} = -8$
$\sqrt[4]{-16}$ تعریف نمی‌شود	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{81} = 3$
$\sqrt[4]{-256}$ تعریف نمی‌شود	$\sqrt[6]{(-2)^6} = \sqrt[6]{64} = 2$
$\sqrt[6]{-64}$ تعریف نمی‌شود	$\sqrt[3]{(-5)^3} = \sqrt[3]{-125} = -5$

۲-۴ توان‌های کسری

در این بخش نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان رادیکال‌ها را به صورت توان کسری نشان داد.

۲-۴-۱ تعریف: اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی مخالف ۱ باشد، آن‌گاه عبارت $\sqrt[n]{a^m}$ را به صورت $a^{\frac{m}{n}}$ نشان می‌دهیم.

۲-۴-۱ نکته: در تعریف ۲-۴-۱، اگر n زوج و m عددی فرد باشد، آن‌گاه a را باید عددی نامنفی اختیار کرد.

مثال ۷: عبارات زیر را به صورت توان کسری بنویسید.

$$۱) \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$$

$$۲) \sqrt[3]{\sqrt[2]{7}} = 7^{\frac{2}{3}}$$

$$۳) \sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$$

$$۴) a\sqrt[3]{a^5} = a(a^{\frac{5}{3}}) = a^{\frac{8}{3}}$$

$$۵) \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{-\frac{1}{3}}$$

$$۶) \sqrt[5]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{5}}$$

۲-۵ خواص رادیکال

۲-۵-۱ تعریف: فرض کنیم m و n اعداد صحیح مثبت و a و b اعداد حقیقی باشند، در این صورت داریم:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد}$$

مثال ۸: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$۱) \sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[6]{5}$$

$$۲) \sqrt[3]{\sqrt[2]{8}} = (\sqrt[3]{8})^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$۳) (\sqrt[5]{2})^5 \times (\sqrt[2]{2})^6 = 2 \times \sqrt[2]{2^6} = 2 \times 2^{\frac{6}{2}} = 2 \times 2^3 = 2^4 = 16$$

$$۴) 3 \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{3} = 3\sqrt[12]{3^4} \times \sqrt[4]{3} = 3 \times \sqrt[4]{3^3} = 3\sqrt[4]{3^3}$$

۲-۶ جمع جبری رادیکال‌ها

در صورتی می‌توان چند رادیکال را با هم جمع یا تفریق کرد که فرجه‌ها و عبارات زیر رادیکال‌ها با هم برابر باشند.

مثال ۹: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$۱) \sqrt[3]{5} + ۲\sqrt[3]{5} = ۳\sqrt[3]{5}$$

$$۲) ۳\sqrt[5]{x} - ۵\sqrt[5]{x} = -۲\sqrt[5]{x}$$

$$۳) ۷\sqrt{3} + ۲\sqrt{5} + ۴\sqrt{3} - ۸\sqrt{5} = ۱۱\sqrt{3} - ۶\sqrt{5}$$

$$۴) ۲\sqrt{7} - ۹\sqrt{2} - \sqrt{11} - ۳\sqrt{7} + ۶\sqrt{2} = -\sqrt{7} - \sqrt{11} - ۳\sqrt{2}$$

مثال ۱۰: ابتدا رادیکال‌ها را ساده کرده، سپس در صورت امکان آن‌ها را با هم جمع کنید.

$$\begin{aligned} ۱) \sqrt{20} - ۳\sqrt{5} + ۴\sqrt{5} &= \sqrt{2^2 \times 5} - ۳\sqrt{5} + ۴\sqrt{5} \\ &= ۲\sqrt{5} - ۳\sqrt{5} + ۴\sqrt{5} \\ &= ۳\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$۲) ۳\sqrt{75} - ۲\sqrt{۲7} = ۳\sqrt{5^2 \times 3} - ۲\sqrt{3^3} = ۱۵\sqrt{3} - ۶\sqrt{3} = ۹\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} ۳) ۳\sqrt{۳2} - ۲\sqrt{3} + ۵\sqrt{۱8} - \sqrt{۱2} \\ &= ۳\sqrt{۲^4 \times 2} - ۲\sqrt{3} + ۵\sqrt{۳^2 \times 2} - \sqrt{۳ \times ۲^2} \\ &= ۱۲\sqrt{2} - ۲\sqrt{3} + ۱۵\sqrt{2} - ۲\sqrt{3} \\ &= ۲۷\sqrt{2} - ۴\sqrt{3} \end{aligned}$$

۲-۷ ضرب عدد در رادیکال

هر گاه بخواهیم عدد پشت رادیکال را به زیر رادیکال ببریم، کافی است آن را به توان فرجه رادیکال رسانده و به زیر رادیکال منتقل کنیم.

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

مثال ۱۱: حاصل عبارات داده شده را به صورت یک رادیکال بنویسید.

$$۱) ۲\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{2^4 \times 7}$$

$$۲) ۵\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5^3 \times 2}$$

$$۳) -۳\sqrt[4]{5} = -\sqrt[4]{3^4 \times 5}$$

$$۴) -۴\sqrt[5]{6} = \sqrt[5]{(-4)^5 \times 6}$$

$$۵) \sqrt{2\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{2^2} \times 5} = \sqrt[4]{40}$$

$$۶) \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^2} \times 3} = \sqrt[6]{3^3}$$

۲-۸ ضرب و تقسیم فرجه بر عدد

۲-۸-۱ تعریف: فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت و a عددی حقیقی نامنفی باشد، در این صورت خواص زیر برقرار است:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[\frac{m}{t}]{a^{\frac{n}{t}}}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mt]{a^{nt}}$$

مثال ۱۲:

$$\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[9]{5^6} \qquad \sqrt[10]{7^5} = \sqrt[2]{7}$$

$$\sqrt[4]{x^4} = \sqrt{x} \qquad \sqrt[10]{9^5} = \sqrt[4]{9} = 3$$

۲-۹ تعیین فرجه مشترک

برای تعیین فرجه مشترک چند رادیکال، کوچک‌ترین مضرب مشترک فرجه‌ها را بر هریک از فرجه‌ها تقسیم کرده، سپس عبارت زیر رادیکال را به توان خارج‌قسمت این تقسیم می‌رسانیم.

مثال ۱۳: فرجه مشترک عبارات $\sqrt[3]{3^5}$ ، $\sqrt[2]{3^3}$ ، $\sqrt[4]{3^2}$ ، $\sqrt[6]{3}$ را تعیین کنید.

حل: کوچک‌ترین مضرب مشترک فرجه‌ها یعنی (۲، ۳، ۴، ۶) عدد ۱۲ است.

پس:

$$\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{3^2} \qquad \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[12]{3^6}$$

$$\sqrt[2]{3^3} = \sqrt[12]{3^{18}} \qquad \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[12]{3^{20}}$$

مثال ۱۴: فرجه مشترک عبارات $\sqrt[2]{3}$ ، $\sqrt[5]{5}$ ، $\sqrt[10]{12}$ را تعیین کنید.

حل: کوچک‌ترین مضرب مشترک فرجه‌ها یعنی (۳، ۵، ۱۰) عدد ۳۰ است.

بنابراین داریم:

$$\sqrt[10]{12} = \sqrt[30]{12^3} \qquad \sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^6} \qquad \sqrt[2]{3} = \sqrt[30]{3^{15}}$$

۲-۱۰ ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

برای ضرب و تقسیم رادیکال‌ها دو حالت زیر امکان دارد:

الف: فرجه رادیکال‌ها با هم برابر باشند. در این صورت:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

در صورتی که رادیکال‌ها ضریب داشته باشند، ضرایب آن‌ها در هم ضرب یا تقسیم می‌شوند.

مثال ۱۵: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$۱) \sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{12}$$

$$۲) \sqrt[3]{5} \div \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

$$۳) ۲\sqrt[4]{7} \times ۳\sqrt[4]{4} = ۶\sqrt[4]{28}$$

$$۴) ۱۸\sqrt{40} \div ۳\sqrt{20} = \frac{18}{3} \sqrt{\frac{40}{20}} = ۶\sqrt{2}$$

ب: فرجه رادیکال‌ها با هم برابر نباشد. در این صورت فرجه‌ها را یکسان کرده و مطابق بند "الف" عمل می‌کنیم.

مثال ۱۶: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$۱) \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{4^2} \times \sqrt[3]{7^3} = \sqrt[3]{16 \times 7^3}$$

$$۲) \sqrt[3]{4} \times \sqrt{4} = \sqrt[3]{4^2} \times \sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{4^5}$$

$$۳) \sqrt[۴]{۵} \times \sqrt[۶]{۷} = \sqrt[۱۲]{۵^۳} \times \sqrt[۱۲]{۷^۲} = \sqrt[۱۲]{۵^۳ \times ۷^۲}$$

$$\begin{aligned} ۴) \sqrt[۴]{۳} \times \sqrt[۳]{۹} \times \sqrt[۲]{۲} &= \sqrt[۱۲]{۳^۳} \times \sqrt[۱۲]{۹^۴} \times \sqrt[۱۲]{۲^۶} = \sqrt[۱۲]{۳^۳ \times ۹^۴ \times ۲^۶} \\ &= \sqrt[۱۲]{۳^{۱۱} \times ۲^۶} \end{aligned}$$

$$۵) \sqrt[۳]{۷} \div \sqrt[۴]{۷} = \sqrt[۱۲]{۷^۴} \div \sqrt[۱۲]{۷^۳} = \sqrt[۱۲]{\frac{۷^۴}{۷^۳}} = \sqrt[۱۲]{۷}$$

$$۶) ۸\sqrt[۵]{۴} \div ۲\sqrt[۳]{۲} = ۸\sqrt[۱۵]{۴^۳} \div ۲\sqrt[۱۵]{۲^۵} = \frac{۸}{۲}\sqrt[۱۵]{\frac{۴^۳}{۲^۵}} = ۴\sqrt[۱۵]{\frac{۲^۶}{۲^۵}} = ۴\sqrt[۱۵]{۲}$$

تمرین

حاصل عبارت‌های داده شده را به دست آورید.

$$۱) \sqrt[۳]{۲۷ \times ۱۲۵}$$

$$۲) \sqrt[۴]{۲^۸ \times ۵^{۱۲}}$$

$$۳) \sqrt[۴]{۵۴ \times ۲۴}$$

$$۴) \sqrt[۵]{۳^{۱۵} \times ۲^{۱۰}}$$

$$۵) \sqrt[۳]{۵۴b^۴c^۶}$$

$$۶) \sqrt[۳]{۱۶b^۵c^۴}$$

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک رادیکال بنویسید.

$$۷) ۵\sqrt{۲}$$

$$۸) ۷\sqrt[۳]{۴}$$

$$۹) ۲\sqrt[۴]{\sqrt{۲}}$$

$$۱۰) \sqrt[۳]{۵\sqrt{۲}}$$

$$۱۱) \sqrt[۳]{۳\sqrt{۵}}$$

$$۱۲) \sqrt[۳]{۲\sqrt{۳}\sqrt[۳]{۳}}$$

$$۱۳) \sqrt[۵]{\sqrt[۳]{\sqrt{۷^۴}}}$$

$$۱۴) \sqrt[۳]{\sqrt[۶]{۷\sqrt{۷}}}$$

عبارات زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$۱۵) \frac{2}{\sqrt[5]{3-4}}$$

$$۱۶) \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$۱۷) \sqrt[5]{\sqrt{a^4}}$$

$$۱۸) \sqrt[3]{5\sqrt{5}}$$

$$۱۹) \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} \quad (a > 0)$$

$$۲۰) \frac{\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{16^4}}$$

عبارت‌های داده شده را به صورت یک رادیکال بنویسید.

$$۲۱) 3^{-\frac{1}{7}}$$

$$۲۲) 5^{\frac{2}{3}}$$

$$۲۳) \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{1}{6}}$$

$$۲۴) a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{4}} \quad (b > 0)$$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$۲۵) 3\sqrt{2} - 2\sqrt[4]{64} + \sqrt{32}$$

$$۲۶) \sqrt{18} + 3\sqrt{32} - 2\sqrt{8}$$

$$۲۷) 2\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 4\sqrt{75}$$

$$۲۸) 4\sqrt{45} + 2\sqrt{20} + \sqrt{245}$$

$$۲۹) \sqrt{5} - 3\sqrt{7} + 2\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{63}$$

$$۳۰) \sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{0.003}$$

$$۳۱) 2\sqrt{50} + \sqrt{2} - 3\sqrt{72} + 4\sqrt{200}$$

$$۳۲) \sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{200}$$

$$۳۳) (\sqrt{20} \times \sqrt{500}) \div (\sqrt{32} \times \sqrt{5})$$

$$۳۴) 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 5\sqrt{2})$$

$$۳۵) (\sqrt[3]{5} \times \sqrt{3}) \div (\sqrt{5} \times \sqrt[3]{3})$$

$$۳۶) \sqrt{2}(\sqrt{3} + 2) - \sqrt{3}(2\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

فصل سوم: عبارات جبری

عبارات جبری از زمان‌های بسیار دور به کار گرفته شده‌اند. شکل فعلی آن‌ها از قرن ۱۵ به وجود آمد. در قرون پیشین معادلات به صورت تشریحی نوشته می‌شدند که نمونه آن‌ها در کارهای دانشمندان ایرانی مانند خوارزمی و نوشته‌های چینی دیده شده‌است.

چندجمله‌ای‌ها در تمامی مباحث ریاضیات مهم بوده و نقش بسیار اساسی دارند و در خارج از ریاضیات، معادلات اقتصاد و علم فیزیک براساس چندجمله‌ای‌ها بیان می‌گردد.

۳-۱ چند جمله‌ای‌ها

برای تعریف چند جمله‌ای‌ها، ابتدا عبارات جبری را تعریف می‌کنیم.

۳-۱-۱ تعریف: هر عبارتی که شامل یک یا چند متغیر، اعداد و تعداد متناهی از اعمال (جمع، تقسیم، توان و رادیکال) بین آن‌ها باشد، یک عبارت جبری می‌باشد.

مثال ۱: هر یک از عبارات زیر یک عبارت جبری است.

۱) $x + 2$

۲) $4ax^3 + b$

۳) $\sqrt{x + 2y}$

۴) $\frac{3x-2y}{\sqrt{x-y}}$

۲-۱-۳ تعریف: یک جمله‌ای عبارتی جبری است که شامل حاصل ضرب یک عدد

حقیقی در یک یا چند متغیر که به توان اعداد صحیح مثبت رسیده باشد.

مثال ۲: عبارات ۵، $3x^2y$ ، $8x$ ، $\sqrt{2}x$ یک جمله‌ای می‌باشند، ولی عبارات $\sqrt{x}$ ، $\frac{2}{x}$ ، xy^{-2} یک جمله‌ای نمی‌باشند؛ زیرا توان متغیرها اعداد صحیح مثبت نمی‌باشد.

۲-۳ درجه یک جمله‌ای

۲-۲-۱ تعریف: نمای یک حرف، در یک چندجمله‌ای ساده شده را درجه آن

یک جمله‌ای نسبت به آن حرف می‌گویند. درجه یک جمله‌ای نسبت به تمام حروف برابر با مجموع نماهای همان حروف در یک جمله‌ای تعریف می‌شود.

مثال ۳: درجه یک جمله‌ای $2x^3y^2z^5$ نسبت به x عدد ۳، نسبت به y عدد ۲، نسبت به z عدد ۵ و نسبت به a عدد صفر و نسبت به تمام حروف برابر با $3+2+5=10$ می‌باشد.

۲-۲-۲ تعریف: یک جمله‌ای‌هایی که قسمت حرفی آن‌ها یکی باشد و تنها در

ضرایب عددی با هم تفاوت داشته باشند، یک جمله‌ای‌های متشابه نامیده می‌شوند.

مثال ۴: یک جمله‌ای‌های $2x^2y^3z$ ، $\sqrt{7}x^2y^3z$ متشابه هستند.

۳-۳ جمع جبری یک جمله‌ای‌ها

چند یک جمله‌ای را زمانی می‌توان با هم جمع کرد که همه آن‌ها متشابه باشند،

در این صورت کافی است همه ضرایب یک جمله‌ای‌ها را با هم جمع کرده و حروف یکی از جملات متشابه را جلوی آن قرار دهیم.

مثال ۵: عبارات جبری داده شده را ساده کنید.

$$۱) 2x^2y + 5x^2y + 3x^2y = (2 + 5 + 3)x^2y = 10x^2y$$

$$۲) 7xz - 3xz + 2xz = (7 - 3 + 2)xz = 6xz$$

$$\begin{aligned}
 ۳) & ۳x^۳yz + ۴x^۲y - ۷x^۳yz + ۵x^۲y - ۸xyz \\
 &= (۳ - ۷)x^۳yz + (۴ + ۵)x^۲y - ۸xyz \\
 &= -۴x^۳yz + ۹x^۲y - ۸xyz
 \end{aligned}$$

۴-۳ ضرب و تقسیم یک جمله‌ای‌ها

برای انجام عمل ضرب و تقسیم یک جمله‌ای‌ها، ابتدا ضرایب آن‌ها را در یکدیگر ضرب یا بر یکدیگر تقسیم می‌کنیم، سپس با استفاده از قواعد مربوط به توان‌ها، حروف را در هم ضرب یا بر یکدیگر تقسیم می‌کنیم.

مثال ۶: حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

$$۱) (۳xy^۲)(۴xy^۳) = ۱۲x^{۱+۱}y^{۲+۳} = ۱۲x^۲y^۵$$

$$۲) (۲xy^۲z^۳)(-۳x^۲y^۳z^۴) = -۶x^۳y^۵z^{۱۰}$$

$$۳) \frac{۲۰x^۳y^۲z^۳}{۵x^۲y^۲z} = ۴xz^۲$$

$$۴) \frac{۳۵xy^{-۱}z^۳}{۷x^۲yz^۲} = \frac{۵z}{xy^۲}$$

$$۵) \frac{۶x^۳y^۸z^۵}{۷x^۲y^۳z^۹} = \frac{۶xy^۵}{۷z^۴}$$

۵-۳ به توان رساندن یک جمله‌ای‌ها

برای به توان رساندن یک جمله‌ای‌ها، کافی است توان حروف را در توان جدید ضرب کرده و ضرایب عددی را هم به توان عدد مورد نظر برسانیم.

مثال ۷: عبارات داده شده را به توان برسانید.

$$۱) (۲x^۲y^{-۳}z^۵)^۳ = ۲^۳(x^۲)^۳(y^{-۳})^۳(z^۵)^۳ = ۸x^۶y^{-۹}z^{۱۵}$$

$$۲) \left(\frac{۲}{۳}x^۲y^۵\right)^۴ = \frac{۲^۴}{۳^۴}(x^۲)^۴(y^۵)^۴ = \frac{۱۶}{۸۱}x^۸y^{۲۰}$$

$$\begin{aligned} ۳) (۴a^{۱۱}b^{۱۰} + (۲a^۷b^۵ \times ۳a^۴b^۵))^۲ &= (۴a^{۱۱}b^{۱۰} + ۶a^{۱۱}b^{۱۰})^۲ \\ &= (۱۰a^{۱۱}b^{۱۰})^۲ \\ &= ۱۰۰a^{۲۲}b^{۲۰} \end{aligned}$$

۳-۶ چندجمله‌ای‌ها

۳-۶-۱ تعریف: مجموع جبری چند یک‌جمله‌ای را، چندجمله‌ای می‌گویند.

مثال ۸: عبارت‌های زیر چندجمله‌ای هستند.

$$۱) ۸x^۲ + ۳x$$

$$۲) xy^۳ + ۲xy + \sqrt{۵}x + z$$

۳-۷ درجه چندجمله‌ای‌ها

درجه چندجمله‌ای نسبت به یکی از حروف، بزرگ‌ترین نمای آن حرف در چندجمله‌ای تعریف می‌شود. درجه هر عدد ثابت را صفر فرض می‌کنیم.

برای تعیین درجه چندجمله‌ای نسبت به تمام حروف، ابتدا درجه هر یک از یک‌جمله‌ای‌های موجود در آن چندجمله‌ای را نسبت به تمام حروف به دست می‌آوریم و بزرگ‌ترین عدد حاصل را درجه آن چندجمله‌ای نسبت به تمام حروف می‌نامیم.

مثال ۹: درجه چندجمله‌ای $۵x^۲y + ۲x^۳y^۶ + ۳x^۵$ را نسبت به تمام حروف به دست آورید.

حل: درجه یک جمله‌ای اول، دوم و سوم نسبت به تمام حروف به ترتیب برابر با ۳، ۵، ۹ می‌باشد. بنابراین درجه چندجمله‌ای نسبت به تمام حروف برابر با بزرگترین عدد ۹ می‌شود.

مثال ۱۰: درجه چندجمله‌ای $3x^3yz + 4x^2y - 7x^5yz + 5x^7y$ را نسبت به تمام حروف به دست آورید.

حل: درجه یک جمله‌ای اول، دوم، سوم و چهارم نسبت به تمام حروف به ترتیب برابر با ۵، ۳، ۷ و ۸ می‌باشد. بنابراین درجه چندجمله‌ای نسبت به تمام حروف برابر با بزرگترین عدد ۸ می‌شود.

۳-۸ جمع جبری چندجمله‌ای‌ها

برای جمع چندجمله‌ای‌ها، کافی است جملات متشابه را با هم جمع کنیم.

مثال ۱۱: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$۱) (2x + 3xy - 8x^2z + 7) + (-3x + 5xy + 7x^2z - 10)$$

$$= (2 - 3)x + (3 + 5)xy + (-8 + 7)x^2z + (7 - 10)$$

$$= -x + 8xy - x^2z - 3$$

$$۲) (2x^3y - 3xyz + 2) - (7x^3y + 3xyz)$$

$$= (2 - 7)x^3y + (-3 - 3)xyz + 2$$

$$= -5x^3y - 6xyz + 2$$

$$۳) a^3 + b^3 + (3a^3 - b^3) - (a^3 - b^3)$$

$$= a^3 + b^3 + 3a^3 - b^3 - a^3 + b^3$$

$$= 3a^3 + b^3$$

۳-۹ ضرب چندجمله‌ای‌ها

برای محاسبه حاصل ضرب چندجمله‌ای‌ها، هر جمله از یکی از آن‌ها را در همه جمله‌های چندجمله‌ای دیگر ضرب و سپس جمع جبری حاصل آن‌ها را به دست می‌آوریم.

۳-۹-۱ نکته: برای ضرب سه پرانتز، ابتدا دو پرانتز اول را در هم ضرب کرده و سپس حاصل را در پرانتز دیگر ضرب می‌کنیم.

مثال ۱۲: حاصل عبارات داده شده را به دست آورید.

$$\begin{aligned} ۱) \quad ۲x^2(3x + 2) &= ۲x^2(3x) + ۲x^2(2) \\ &= 6x^3 + 4x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲) \quad (2x + 3y^2)(x^2 + xy) &= 2x(x^2 + xy) + 3y^2(x^2 + xy) \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3x^2y^2 + 3xy^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳) \quad (2x^2 + 3xy)(5x^2 + 2y - 3) \\ &= 2x^2(5x^2 + 2y - 3) + 3xy(5x^2 + 2y - 3) \\ &= 10x^4 + 4x^2y - 6x^2 + 15x^3y + 6xy^2 - 9xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۴) \quad (2x + 5)(3 + x)(2y - z) \\ &= (6x + 2x^2 + 15 + 5x)(2y - z) \\ &= (11x + 2x^2 + 15)(2y - z) \\ &= 22xy - 11xz + 4x^2y - 2x^2z + 30y - 15z \end{aligned}$$

۳-۱۰ تقسیم چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای

برای تقسیم یک چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای، هر جمله آن را بر یک جمله‌ای تقسیم کرده و ساده می‌کنیم.

مثال ۱۳: حاصل عبارات زیر را ساده کنید.

$$\begin{aligned}
 ۱) \quad \frac{۵x^۴ + ۲x^۳ + ۳x^۲}{x^۲} &= \frac{۵x^۴}{x^۲} + \frac{۲x^۳}{x^۲} + \frac{۳x^۲}{x^۲} = ۵x^۲ + ۲x + ۳ \\
 ۲) \quad \frac{۴y^۳ + ۱۶y - ۲۴y^۵}{۴y^۳} &= \frac{۴y^۳}{۴y^۳} + \frac{۱۶y}{۴y^۳} - \frac{۲۴y^۵}{۴y^۳} = ۱ + \frac{۴}{y^۲} - ۶y^۲ \\
 ۳) \quad \frac{۱۴x^۲y^۳ - ۴xy^۲ - ۸xy}{۲xy} &= \frac{۱۴x^۲y^۳}{۲xy} - \frac{۴xy^۲}{۲xy} - \frac{۸xy}{۲xy} \\
 &= ۷xy^۲ - ۲y - ۴ \\
 ۴) \quad \frac{۹x^۳yz - ۲۷x^۴yz - ۱۸xy}{۳x^۲y^۳z^۲} &= \frac{۹x^۳yz}{۳x^۲y^۳z^۲} - \frac{۲۷x^۴yz}{۳x^۲y^۳z^۲} - \frac{۱۸xy}{۳x^۲y^۳z^۲} \\
 &= \frac{۳x}{y^۲z} - \frac{۹x^۲}{y^۲z} - \frac{۶}{xy^۲z^۲}
 \end{aligned}$$

۳-۱۱ تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

برای تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱- جملات مقسوم و مقسوم‌علیه را برحسب توان‌های نزولی حروف مرتب می‌کنیم.

۲- اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم و حاصل را در خارج قسمت می‌نویسیم.

۳- خارج‌قسمت را در همه جملات مقسوم‌علیه ضرب کرده و قرینه حاصل را با مقسوم جمع کرده تا اولین باقیمانده به دست آید و آن را به عنوان مقسوم جدید در نظر می‌گیریم.

۴- اعمال فوق را دربارۀ هر یک از مقسوم‌های جدید تکرار می‌کنیم تا به باقیمانده‌ای برسیم که درجه آن از مقسوم‌علیه کوچک‌تر باشد.

مثال ۱۴: حاصل تقسیم $\frac{-7x^2 + 6x + 1}{x-3}$ را به دست آورید.

حل: با توجه به توضیحات فوق داریم:

$$\begin{array}{r|l}
 -7x^2 + 6x + 1 & x - 3 \\
 \pm 7x^2 \mp 21x & \hline
 -15x + 1 & \\
 \pm 15x \mp 45 & \\
 \hline
 -44 &
 \end{array}$$

مثال ۱۵: حاصل تقسیم $\frac{-4x^2 - 3x + 2x^3}{-2+x}$ را بیابید.

حل: ابتدا عبارات صورت و مخرج را برحسب توان‌های نزولی x مرتب کرده، سپس بر اساس دستورالعمل عمل می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 4x^2 - 3x & x - 2 \\
 \mp 2x^3 \pm 4x^2 & \hline
 -3x & \\
 \pm 3x \mp 6 & \\
 \hline
 -6 &
 \end{array}$$

مثال ۱۶: حاصل تقسیم $\frac{2x^3 + 2}{1+x}$ را به دست آورید.

حل: عبارات صورت و مخرج را برحسب توان‌های نزولی x مرتب کرده و بر اساس دستورالعمل عمل می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + 2 & x + 1 \\
 \mp 2x^3 \mp 2x^2 & \hline
 -2x^2 + 2 & \\
 \pm 2x^2 \pm 2x & \\
 \hline
 2x + 2 & \\
 \mp 2x \mp 2 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

مثال ۱۷: حاصل تقسیم $\frac{-6x^3 + 5x^4}{1-x^2}$ را به دست آورید.

حل: عبارات صورت و مخرج را برحسب توان‌های نزولی x مرتب کرده و بر اساس دستورالعمل عمل می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l}
 5x^4 - 6x^3 & -x^2 + 1 \\
 \hline
 \mp 5x^4 \pm 5x^2 & -5x^2 + 6x - 5 \\
 \hline
 -6x^3 + 5x^2 & \\
 \hline
 \pm 6x^3 \mp 6x & \\
 \hline
 5x^2 - 6x & \\
 \hline
 \mp 5x^2 \pm 5 & \\
 \hline
 -6x + 5 &
 \end{array}$$

تمرین

درجه یک جمله‌ای‌های زیر را نسبت به تمام حروف تعیین کنید.

- ۱) $5x^4y^5z^3$
- ۲) $3x^2yz$
- ۳) $x^2y^3z^5w$
- ۴) xyz

عبارات جبری زیر را ساده کنید.

- ۵) $(7x^2y^3)(3xyz)$
- ۶) $7xy + 2xy + 3xy$
- ۷) $(5x^4y^3z^{-2})(1 \cdot x^2yz)$
- ۸) $(2x^3y^2z^4)^3$
- ۹) $((7x^3y^4 \times 5x^5y^{-2}) + 3x^4y^5)^3$

درجه چندجمله‌ای‌های داده شده را نسبت به تمام حروف تعیین کنید.

- ۱۰) $x^4y + xy^4$
- ۱۱) $5x^2yz + x^2y + x^3z$

چند جمله‌ای‌های زیر را ساده کنید.

$$۱۲) x^2y - 9x - 7xy + 3x + 2x^2y - 5$$

$$۱۳) x^2z + 2xz^2 - 3xz + 2x^2z$$

$$۱۴) 3x^2y^2 + 4y^4 - (x^2y - 4x^2y^2 - 3xy^3 + 2y^4)$$

حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورده و ساده کنید.

$$۱۵) x^2y^2z(x^2y + 3xy)$$

$$۱۶) (xy + xz)(xy - xz)$$

$$۱۷) (2xy + 3z)(2 + x)(y + z)$$

$$۱۸) (3x^2 + 2x)(2 + x)(-5x^2 + x + 1)$$

عبارات زیر را ساده کنید.

$$۱۹) \frac{x^3 - 7x^2 + x + 1}{x}$$

$$۲۰) \frac{4x^2y + 2x^3y}{2xy}$$

$$۲۱) \frac{18x^2yz + 2x^2yz - 4xy}{2x^2y^2z^3}$$

$$۲۲) \frac{10x^2y - 5x^2yz + 25xyz}{5x^4y^3z^2}$$

حاصل تقسیم‌های زیر را به دست آورید.

$$۲۳) \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x - 1}$$

$$۲۴) \frac{6x - 7x^2 + 1}{x - 2}$$

$$۲۵) \frac{x^2 + 2x^2 + 2x - 5}{x + 2}$$

$$۲۶) \frac{3y^2 - 13y + 4}{y - 4}$$

$$۲۷) \frac{2x^3 + 5x^2 - 3x + 4}{x - 2}$$

$$۲۸) \frac{12 + 7x^2 + 5x^3}{2 + x}$$

$$۲۹) \frac{x^3 - 1}{x + 1}$$

$$۳۰) \frac{2x^3 + 4x^2 - 5}{x^2 + 3}$$

۳-۱۲ اتحادها

۳-۱۲-۱ تعریف: اتحاد یک تساوی حرفی است که به ازای همه مقادیر عددی که به حروف نسبت می‌دهیم برقرار باشد.

تساوی‌های $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ و $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$ اتحاد جبری می‌باشند. علیرغم این که طیف اتحادها بسیار وسیع است و اتحادهای بی‌شماری وجود دارد، اما لازم نیست تمام آن‌ها را به خاطر بسپاریم، بلکه فقط کافی است تعدادی از آن‌ها را که به طور مرتب از آن‌ها استفاده می‌کنیم به خاطر داشته باشیم. بعضی از اتحادهای مهم را در ادامه خواهیم دید.

اتحاد مربع مجموع دو جمله

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال ۱۸: حاصل عبارات زیر با استفاده از اتحاد مربع مجموع دو جمله محاسبه شده است.

$$۱) (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$۲) (2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5) + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$$

$$\begin{aligned} ۳) (3x^2 + 2y)^2 &= (3x^2)^2 + 2(3x^2)(2y) + (2y)^2 \\ &= 9x^4 + 12x^2y + 4y^2 \end{aligned}$$

$$۴) \left(x + \frac{4}{x}\right)^2 = x^2 + 2(x)\left(\frac{4}{x}\right) + \left(\frac{4}{x}\right)^2 = x^2 + 8 + \frac{16}{x^2}$$

$$\begin{aligned} ۵) (3x + \sqrt{3})^2 &= (3x)^2 + 2(3x)(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 \\ &= 9x^2 + 6\sqrt{3}x + 3 \end{aligned}$$

اتحاد مربع تفاضل دو جمله

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال ۱۹: حاصل عبارات زیر با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله محاسبه شده است.

$$۱) (\Delta x - ۴)^2 = (\Delta x)^2 - 2(\Delta x)(۴) + ۴^2 = 2\Delta x^2 - ۴۰x + ۱۶$$

$$۲) (x - \sqrt{3})^2 = x^2 - 2\sqrt{3}x + (\sqrt{3})^2 = x^2 - 2\sqrt{3}x + ۳$$

$$۳) (y^3 - \frac{1}{4})^2 = (y^3)^2 - 2(y^3)(\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4})^2 = y^6 - y^3 + \frac{1}{۴}$$

$$\begin{aligned} ۴) (a^2 - \Delta xy^3)^2 &= (a^2)^2 - 2(a^2)(\Delta xy^3) + (\Delta xy^3)^2 \\ &= a^4 - ۱۰a^2xy^3 + 2\Delta x^2y^{1۴} \end{aligned}$$

اتحاد مزدوج

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

مثال ۲۰: حاصل عبارات زیر با استفاده از اتحاد مزدوج محاسبه شده است.

$$۱) (x - 2y)(x + 2y) = x^2 - 4y^2$$

$$۲) (6x^4 - 5)(6x^4 + 5) = (6x^4)^2 - 5^2 = 36x^8 - 25$$

$$۳) (\sqrt{2}x - 4y^2)(\sqrt{2}x + 4y^2) = (\sqrt{2}x)^2 - (4y^2)^2 = 2x^2 - 16y^4$$

$$۴) (\frac{x}{3} - \frac{y}{2})(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}) = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$$

اتحاد جمله مشترک

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

مثال ۲۱: حاصل عبارات زیر با استفاده از اتحاد جمله مشترک محاسبه شده است.

$$۱) (x + ۳)(x + ۴) = x^۲ + (۳ + ۴)x + (۳)(۴) = x^۲ + ۷x + ۱۲$$

$$\begin{aligned} ۲) (۲x - ۳)(۲x + ۷) &= (۲x)^۲ + (-۳ + ۷)(۲x) + (-۳)(۷) \\ &= ۴x^۲ + ۸x - ۲۱ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳) (a^۲b^۳ + ۴)(a^۲b^۳ - ۷) &= (a^۲b^۳)^۲ + (۴ - ۷)a^۲b^۳ + (۴)(-۷) \\ &= a^۴b^۶ - ۳a^۲b^۳ - ۲۸ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۴) (\Delta x - y)(\Delta x + ۳y) &= (\Delta x)^۲ + (-y + ۳y)(\Delta x) + (-y)(۳y) \\ &= ۲\Delta x^۲ + ۱۰xy - ۳y^۲ \end{aligned}$$

اتحاد مکعب مجموع دو جمله

$$(a + b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$$

مثال ۲۲: حاصل عبارات زیر با استفاده از اتحاد مکعب مجموع دو جمله به دست آمده است.

$$\begin{aligned} ۱) (x + ۳)^۳ &= x^۳ + ۳x^۲(۳) + ۳x(۳)^۲ + ۳^۳ \\ &= x^۳ + ۹x^۲ + ۲۷x + ۲۷ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲) (۲x + ۳y)^۳ &= (۲x)^۳ + ۳(۲x)^۲(۳y) + ۳(۲x)(۳y)^۲ + (۳y)^۳ \\ &= ۸x^۳ + ۳۶x^۲y + ۵۴xy^۲ + ۲۷y^۳ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳) (x^۲ + \Delta y^۳)^۳ &= (x^۲)^۳ + ۳(x^۲)^۲(\Delta y^۳) + ۳(x^۲)(\Delta y^۳)^۲ + (\Delta y^۳)^۳ \\ &= x^۶ + ۱۵x^۴y^۳ + ۷\Delta x^۲y^۶ + ۱۲\Delta y^۹ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۴) \left(x + \frac{۱}{x}\right)^۳ &= x^۳ + ۳x^۲\left(\frac{۱}{x}\right) + ۳x\left(\frac{۱}{x}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{x}\right)^۳ \\ &= x^۳ + ۳x + \frac{۳}{x} + \frac{۱}{x^۳} \end{aligned}$$

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مثال ۲۳: حاصل عبارات زیر با استفاده از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله محاسبه شده است.

$$۱) (x - 2)^3 = x^3 - 3x^2(2) + 3x(2)^2 - 2^3$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$۲) (2x^2y - 3)^3 = (2x^2y)^3 - 3(2x^2y)^2(3) + 3(2x^2y)(3)^2 - (3)^3$$

$$= 8x^6y^3 - 36x^4y^2 + 54x^2y - 27$$

$$۳) (1 - 2bc^3)^3 = (1)^3 - 3(1)^2(2bc^3) + 3(1)(2bc^3)^2 - (2bc^3)^3$$

$$= 1 - 6bc^3 + 12b^2c^6 - 8b^3c^9$$

$$۴) (1 - \frac{1}{4}x)^3 = 1^3 - 3(1)^2(\frac{1}{4}x) + 3(1)(\frac{1}{4}x)^2 - (\frac{1}{4}x)^3$$

$$= 1 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

مثال ۲۴: حاصل عبارات داده شده با استفاده از اتحاد مجموع مکعب دو جمله به دست آمده است.

$$۱) (2a + 4)(4a^2 - 8a + 16) = (2a)^3 + (4)^3 = 8a^3 + 64$$

$$۲) (\frac{1}{3}x + 3)(\frac{1}{9}x^2 - x + 9) = (\frac{1}{3}x)^3 + (3)^3 = \frac{1}{27}x^3 - 27$$

$$۳) (5x^2y + 2z^3)(25x^4y^2 - 10x^2yz^3 + 4z^6) = (5x^2y)^3 + (2z^3)^3 \\ = 125x^6y^3 + 8z^9$$

$$\begin{aligned}
 & ۴) [(۲x + y) + ۳] [(۲x + y)^۲ - ۳(۲x + y) + ۳^۲]) \\
 & = (۲x + y)^۳ + ۳^۳ \\
 & = ۸x^۳ + ۱۲x^۲y + ۶xy^۲ + y^۳ + ۲۷
 \end{aligned}$$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله

$$(a - b)(a^۲ + ab + b^۲) = a^۳ - b^۳$$

مثال ۲۵: حاصل عبارات زیر با استفاده از اتحاد تفاضل مکعب دو جمله محاسبه شده است.

$$\begin{aligned}
 ۱) (y - ۵)(y^۲ + ۵y + ۲۵) &= y^۳ - ۵^۳ = y^۳ - ۱۲۵ \\
 ۲) (۲x - ۳y)(۴x^۲ + ۶xy + ۹y^۲) &= (۲x)^۳ - (۳y)^۳ = ۸x^۳ - ۲۷y^۳ \\
 ۳) (x^۲ - \sqrt{۳})(x^۴ + \sqrt{۳}x^۲ + ۳) &= (x^۲)^۳ - (\sqrt{۳})^۳ = x^۶ - \sqrt{۳} \\
 ۴) (a^۳ - \frac{1}{۲})(a^۶ + \frac{1}{۲}a^۳ + \frac{1}{۲}) &= (a^۳)^۳ - (\frac{1}{۲})^۳ = a^۹ - \frac{1}{۸}
 \end{aligned}$$

اتحاد مربع مجموع سه جمله

$$(a + b + c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲ac + ۲bc$$

مثال ۲۶: حاصل عبارات داده شده را با استفاده از اتحاد مربع مجموع سه جمله محاسبه شده است.

$$\begin{aligned}
 ۱) (۲x + ۳y + ۲)^۲ &= ۴x^۲ + ۹y^۲ + ۴ + ۱۲xy + ۸x + ۱۲y \\
 ۲) (x^۲ + y + ۱)^۲ &= x^۴ + y^۲ + ۱ + ۲x^۲y + ۲x^۲ + ۲y \\
 ۳) (x^۲ + x - ۳)^۲ &= x^۴ + x^۲ + ۹ + ۲x^۳ - ۶x^۲ - ۶x \\
 ۴) (x^۳ - \sqrt{۲}x - ۱)^۲ &= x^۶ + ۲x^۲ + ۱ - ۲\sqrt{۲}x^۴ - ۲x^۳ + ۲\sqrt{۲}x
 \end{aligned}$$

مثال ۲۷: حاصل عبارات زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

$$\begin{aligned} ۱) (x + ۲y)^۲ + (x - ۲y)^۲ &= x^۲ + ۴xy + ۴y^۲ + x^۲ - ۴xy + ۴y^۲ \\ &= ۲x^۲ + ۸y^۲ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲) (x - ۱)(x + ۱)(x^۲ + ۱)(x^۴ + ۱) \\ &= (x^۲ - ۱)(x^۲ + ۱)(x^۴ + ۱) \\ &= (x^۴ - ۱)(x^۴ + ۱) \\ &= x^۸ - ۱ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳) (x + ۳)(x^۲ - ۳x + ۹) - (x - ۳)(x^۲ + ۳x + ۹) \\ &= (x^۳ + ۲۷) - (x^۳ - ۲۷) \\ &= ۵۴ \end{aligned}$$

$$۴) x(x - \frac{y}{x})(x^۲ + y) = (x^۲ - y)(x^۲ + y) = x^۴ - y^۲$$

$$۵) (x^۳ - ۱)(x^۳ + ۱)(x^۶ + ۱) = (x^۶ - ۱)(x^۶ + ۱) = x^{۱۲} - ۱$$

$$\begin{aligned} ۶) (x - ۲y)^۲(x + ۲y)^۲ &= ((x - ۲y)(x + ۲y))^۲ = (x^۲ - ۴y^۲)^۲ \\ &= x^۴ - ۸x^۲y^۲ + ۱۶y^۴ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۷) (x + ۲y + a - b)(x - ۲y + a + b) \\ &= ((x + a) + (۲y - b))((x + a) - (۲y - b)) \\ &= (x + a)^۲ - (۲y - b)^۲ \\ &= x^۲ + ۲ax + a^۲ - ۴y^۲ + ۴by - b^۲ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۸) (x - ۲)(x + ۲)(x^۴ + ۴x^۲ + ۱۶) &= (x^۲ - ۴)(x^۴ + ۴x^۲ + ۱۶) \\ &= (x^۲)^۳ - (۴)^۳ \\ &= x^۶ - ۶۴ \end{aligned}$$

$$۹) [(x - ۱)(x + ۱)]^۳ = (x^۲ - ۱)^۳ = x^۶ - ۳x^۴ + ۳x^۲ - ۱$$

$$\begin{aligned} ۱۰) (۲a - ۱)(۴a^۲ + ۲a + ۱)(۷a^۳ + ۱) &= (۷a^۳ - ۱)(۷a^۳ + ۱) \\ &= ۴۹a^۶ - ۱ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۱) (x + ۷)(x - ۲)(x^۲ + ۵x + ۱۴) \\ &= (x^۲ + ۵x - ۱۴)(x^۲ + ۵x + ۱۴) \\ &= (x^۲ + ۵x)^۲ - (۱۴)^۲ \\ &= x^۴ + ۱۰x^۳ + ۲۵x^۲ - ۱۹۶ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۲) (\sqrt{۲}x + \sqrt{۳}y)^۲(\sqrt{۲}x - \sqrt{۳}y)^۲ \\ &= ((\sqrt{۲}x + \sqrt{۳}y)(\sqrt{۲}x - \sqrt{۳}y))^۲ \\ &= (۲x^۲ - ۳y^۲)^۲ \\ &= ۴x^۴ - ۱۲x^۲y^۲ + ۹y^۴ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۳) (x + ۱)^۳ + (x - ۱)^۳ \\ &= x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ + x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ \\ &= ۲x^۳ + ۶x \end{aligned}$$

تمرین

حاصل عبارات زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

- | | |
|---------------------------|-------------------------------|
| ۱) $(\frac{x}{y} + y)^۲$ | ۲) $(۲x + ۵)^۲$ |
| ۳) $(a^۲x - by^۲)^۲$ | ۴) $(xy^۲ - xz^۲)^۲$ |
| ۵) $(x^۲ - ۳x + ۲)^۲$ | ۶) $(۳x^۴ - y^۲)(۳x^۴ + y^۲)$ |
| ۷) $(۳x^۲ + ۲)(۳x^۲ - ۹)$ | ۸) $(a + b + ۱)(a + b - ۱)$ |
| ۹) $(xy - ۳)(xy + ۴)$ | ۱۰) $(۵ - ۲a)(۷ - ۲a)$ |
| ۱۱) $(۷ - x^۳)(۷ + x^۳)$ | ۱۲) $(x - ۷)(x + ۹)$ |

- ۱۳) $(3a + 2b)^3$ ۱۴) $(2x - 5)(2x - 8)$
- ۱۵) $(x - \frac{y}{3})(x + \frac{y}{3})$ ۱۶) $(\frac{x}{3} - \frac{y}{5})(\frac{x}{3} + \frac{y}{5})$
- ۱۷) $(3x - y)^2(3x + y)^2$ ۱۸) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$
- ۱۹) $(x + 2)^3 + (x - 2)^3$ ۲۰) $(\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{b})^3$
- ۲۱) $(x + 2y^2)^3$ ۲۲) $(5x^2 + 3y)^3$
- ۲۳) $(\frac{x}{2} - 2)^3$ ۲۴) $(\frac{3x}{2} + \frac{4y}{3})^3$
- ۲۵) $(x^2 + \frac{1}{x})^3$ ۲۶) $(x - \frac{1}{3}x)^3$
- ۲۷) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$
- ۲۸) $(\frac{x}{3} - 1)(\frac{x}{3} + 1)(\frac{x^2}{9} + 1)(\frac{x^4}{81} + 1)$
- ۲۹) $(2x + 3y - 4)(2x + 3y + 4)$
- ۳۰) $(x^2y^2 - \sqrt{5})(x^2y^2 + \sqrt{5})$
- ۳۱) $(\sqrt{1 + a^2} - a)(\sqrt{1 + a^2} + a)$
- ۳۲) $(\sqrt[3]{3} - 2)(\sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} + 4)$
- ۳۳) $(3\sqrt{2} - 5)^3(3\sqrt{2} + 5)^3$
- ۳۴) $(x + 2)(x + 3)(x^2 + 5x - 6)$
- ۳۵) $(x - 5)(x + 2)(x^2 - 3x + 10)$
- ۳۶) $((5 + 2x)(2x - 3) - (3 + 2x)(2x - 3))$
- ۳۷) $(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 1)$
- ۳۸) $(3x^2 - x + 1)(3x^2 - x + 2)$
- ۳۹) $(y - 1)(y + 2)(y^2 + y + 2)$
- ۴۰) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x^2 + 1)$
- ۴۱) $(x - 1)(x + 3)(x^2 + 2x + 3)$

۳-۱۳ تجزیه چندجمله‌ای‌ها

منظور از تجزیه یک چندجمله‌ای، تبدیل آن به حاصل ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای با درجه کم‌تر است. برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها از روش‌های مختلفی می‌توان استفاده کرد. در ادامه این روش‌ها را ارائه می‌دهیم.

۳-۱۴ تجزیه به کمک فاکتورگیری

هرگاه همه جملات یک عبارت جبری دارای عامل مشترکی باشد، آن عامل را به عنوان عامل مشترک انتخاب کرده و سپس هر یک از جملات عبارت را بر عامل مشترک تقسیم می‌کنیم.

مثال ۲۸: عبارات زیر را با استفاده از روش فاکتورگیری تجزیه کنید.

الف) $4x^2 + 2xy - x$

ب) $4x^3y^2z^5 + 8x^2yz^4 + 2x^4y^3z^3$

ج) $4a(3x - y) + 2ay(3x - y)^2 + 2(3x - y)$

حل:

الف: تمام جملات دارای عامل مشترک x می‌باشند، بنابراین از این عامل مشترک می‌توان فاکتور گرفت. در این صورت خواهیم داشت.

$$4x^2 + 2xy - x = x(4x + 2y - 1)$$

ب: همه جملات دارای عامل مشترک $2x^2yz^3$ می‌باشند. بنابراین همه جملات عبارت $4x^3y^2z^5 + 8x^2yz^4 + 2x^4y^3z^3$ را بر این عامل تقسیم می‌کنیم.

$$4x^3y^2z^5 + 8x^2yz^4 + 2x^4y^3z^3 = 2x^2yz^3 (2xyz^2 + 4z + x^2y^2)$$

ج: همه جملات دارای عامل مشترک $(3x - y)$ می‌باشند، بنابراین می‌توان از این عامل مشترک فاکتور گرفت. در این صورت خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} & 4a(3x - y) + 2ay(3x - y)^2 + 2(3x - y) \\ &= 2(3x - y)(2a + ay(3x - y) + 1) \end{aligned}$$

۳-۱۵ تجزیه به کمک اتحادها

بعضی از عبارتهای جبری را می‌توان به کمک اتحادها تجزیه کرد.

مثال ۲۹: عبارتهای زیر به کمک اتحاد مربع تجزیه شده‌اند.

$$\begin{aligned} ۱) \quad & x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 \\ ۲) \quad & 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2 \\ ۳) \quad & x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \\ ۴) \quad & 9x^2 - 3xy + \frac{y^2}{4} = \left(3x - \frac{y}{2}\right)^2 \\ ۵) \quad & x^2 + 2xy^2 + y^4 = (x + y^2)^2 \end{aligned}$$

مثال ۳۰: عبارتهای زیر به کمک اتحاد مزدوج تجزیه شده‌اند.

$$\begin{aligned} ۱) \quad & x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \\ ۲) \quad & 4x^2 - 16 = (2x - 4)(2x + 4) \\ ۳) \quad & 25x^4 - 9y^6 = (5x^2 - 3y^3)(5x^2 + 3y^3) \\ ۴) \quad & 5x^4 - 1 = (\sqrt{5}x^2 - 1)(\sqrt{5}x^2 + 1) \\ ۵) \quad & (a + b)^2 - (x - y)^2 \\ &= ((a + b) - (x - y))((a + b) + (x - y)) \\ &= (a + b - x + y)(a + b + x - y) \end{aligned}$$

مثال ۳۱: عبارت‌های زیر به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه شده‌اند.

$$۱) x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

$$۲) x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

$$۳) x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$$

$$۴) x^2 - 9x + 14 = (x - 2)(x - 7)$$

مثال ۳۲: عبارت‌های زیر به کمک اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دوجمله تجزیه شده‌اند.

$$۱) x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$۲) x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

$$۳) x^6 + 125 = (x^2 + 5)(x^4 - 5x^2 + 25)$$

$$۴) 8t^3 - 1 = (2t - 1)(4t^2 + 2t + 1)$$

$$\begin{aligned} ۵) (x + 1)^3 + y^3 &= (x + 1 + y)((x + 1)^2 - (x + 1)y + y^2) \\ &= (x + y + 1)(x^2 + 2x + 1 - xy - y + y^2) \end{aligned}$$

۳-۱۶ تجزیه به کمک دسته‌بندی

هر گاه در یک عبارت جبری، تمام جملات دارای عامل مشترک نباشند، آن‌گاه ممکن است بتوان با دسته‌بندی جملات و استفاده از روش فاکتورگیری عبارت مورد نظر را تجزیه کرد.

مثال ۳۳: عبارات داده شده به کمک دسته‌بندی تجزیه شده‌اند.

$$\begin{aligned} ۱) x^3 + x^2 + x + 1 &= (x^3 + x^2) + (x + 1) \\ &= x^2(x + 1) + (x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۲) \quad x^۳ - ۲x^۲ - ۴x + ۸ &= (x^۳ - ۲x^۲) + (-۴x + ۸) \\
 &= x^۲(x - ۲) - ۴(x - ۲) \\
 &= (x - ۲)(x^۲ - ۴) \\
 &= (x - ۲)(x - ۲)(x + ۲) \\
 &= (x - ۲)^۲(x + ۲)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۳) \quad ۴x^۳ + ۴x^۲ - x - ۱ &= (۴x^۳ + ۴x^۲) + (-x - ۱) \\
 &= ۴x^۲(x + ۱) - (x + ۱) \\
 &= (x + ۱)(۴x^۲ - ۱) \\
 &= (x + ۱)(۲x - ۱)(۲x + ۱)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۴) \quad ۱۰a^۳ + ۲۵a - ۴a^۲ - ۱۰ &= (۱۰a^۳ - ۴a^۲) + (۲۵a - ۱۰) \\
 &= ۲a^۲(۵a - ۲) + ۵(۵a - ۲) \\
 &= (۵a - ۲)(۲a^۲ + ۵)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۵) \quad x^۳ + ۴xy + ۴y^۲ - z^۳ &= (x^۳ + ۴xy + ۴y^۲) - z^۳ \\
 &= (x + ۲y)^۳ - z^۳ \\
 &= (x + ۲y - z)(x + ۲y + z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۶) \quad x^۳ - ۶x + ۹ - ۹y^۲ &= (x^۳ - ۶x + ۹) - ۹y^۲ = (x - ۳)^۳ - ۹y^۲ \\
 &= (x - ۳ - ۳y)(x - ۳ + ۳y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۷) \quad x^۵ + ۲x^۴ + x^۳ + x^۲ + ۲x + ۱ &= (x^۵ + ۲x^۴ + x^۳) + (x^۲ + ۲x + ۱) \\
 &= x^۳(x^۲ + ۲x + ۱) + (x^۲ + ۲x + ۱) \\
 &= (x^۲ + ۲x + ۱)(x^۳ + ۱) \\
 &= (x + ۱)^۲(x + ۱)(x^۳ + x + ۱)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ۸) x^3 + 9x^2 + 11x - 21 \\
& = x^3 + 9x^2 + 11x - 1 - 9 - 11 \\
& = (x^3 - 1) + (9x^2 - 9) + (11x - 11) \\
& = (x^3 - 1) + 9(x^2 - 1) + 11(x - 1) \\
& = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 9(x - 1)(x + 1) + 11(x - 1) \\
& = (x - 1)(x^2 + x + 1 + 9x + 9 + 11) \\
& = (x - 1)(x^2 + 10x + 21) \\
& = (x - 1)(x + 3)(x + 7) \\
& ۹) (x + 3)^2 - y^2 - 2xy - x^2 \\
& = (x + 3)^2 - (y + x)^2 \\
& = ((x + 3) - (y + x))((x + 3) + (y + x)) \\
& = (x + 3 - y - x)(x + 3 + y + x) \\
& = (3 - y)(2x + 3 + y)
\end{aligned}$$

۳-۱۷ تجزیه به وسیله افزودن و کاستن

در تجزیه بعضی از عبارت‌های جبری برای آن که بتوانیم عبارت را با استفاده از دسته‌بندی تجزیه کنیم باید جمله‌ای را اضافه و همان جمله را کم کرد. معمولاً برای تجزیه عبارت جبری‌ای که به صورت جمع دو جمله مربع هستند می‌توان از این روش استفاده کرد.

مثال ۳۴: عبارت داده شده با روش افزودن و کاستن تجزیه شده‌اند.

$$\begin{aligned}
۱) y^4 + 1 &= y^4 + 1 + 2y^2 - 2y^2 = (y^2 + 1)^2 - 2y^2 \\
&= (y^2 + 1 - \sqrt{2}y)(y^2 + 1 + \sqrt{2}y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۲) \quad x^4 + 4y^4 &= x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 \\
 &= (x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2) - 4x^2y^2 \\
 &= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 \\
 &= (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۳) \quad x^4 + 64 &= (x^4 + 16x^2 + 64) - 16x^2 = (x^2 + 8)^2 - 16x^2 \\
 &= (x^2 + 8 - 4x)(x^2 + 8 + 4x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۴) \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 &= (x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2y^2) - x^2y^2 \\
 &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 \\
 &= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 \\
 &= (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۵) \quad x^4 + y^4 &= x^4 + 2x^2y^2 - 2x^2y^2 + y^4 \\
 &= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2x^2y^2 \\
 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \\
 &= (x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy)
 \end{aligned}$$

۳-۱۸ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) و کوچک‌ترین مضرب

مشترک (ک.م.م)

برای محاسبه ب.م.م و ک.م.م دو چندجمله‌ای، ابتدا چندجمله‌ای‌ها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم. سپس برای محاسبه ب.م.م، حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک با کم‌ترین توان و برای محاسبه ک.م.م، حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک و غیر مشترک با بیشترین توان را اختیار می‌کنیم.

مثال ۳۵: در مثال‌های زیر ب. م. و ک. م. عبارت‌های داده شده محاسبه شده است.

الف:

$$A = ۴\Delta x^2 y^4 z$$

$$B = ۶ \cdot x^3 y^{\Delta} z^2$$

$$A = 3^2 \times \Delta x^2 y^4 z$$

$$B = 2^2 \times \Delta \times 3x^3 y^{\Delta} z^2$$

$$(B \circ A)_{\text{م.ب.م}} = 3 \times \Delta x^2 y^4 z = ۱\Delta x^2 y^4 z$$

$$(B \circ A)_{\text{م.ک.م}} = 3^2 \times 2^2 \times \Delta x^3 y^{\Delta} z^2 = ۱۸ \cdot x^3 y^{\Delta} z^2$$

ب:

$$A = x^2 + x$$

$$B = x^2 + 3x + 2$$

$$A = x(x + ۱)$$

$$B = (x + 2)(x + ۱)$$

$$(B \circ A)_{\text{م.ب.م}} = (x + ۱)$$

$$(B \circ A)_{\text{م.ک.م}} = x(x + 2)(x + ۱)$$

ج:

$$A = 3x^2 - ۱2$$

$$B = 3x - ۶$$

$$A = 3(x - 2)(x + 2)$$

$$B = 3(x - 2)$$

$$(B \circ A)_{\text{م.ب.م}} = 3(x - 2)$$

$$(B \circ A)_{\text{م.ک.م}} = 3(x - 2)(x + 2)$$

تمرین

عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$۱) 4x^4 - x^2 + \frac{1}{16}$$

$$۳) 9x^4y + 12x^2y + 4y$$

$$۵) x^2y - xy^2$$

$$۷) 5x^2y^2 - 10xy^2 + 15x^2y$$

$$۹) x^2y^2 - 36x$$

$$۱۱) (2x + 3)(2a + b) + (2x + 3)(2a - b)$$

$$۲) 4x^2 - 4x + 1$$

$$۴) x^2 + 20x^2 + 50x$$

$$۶) 27(x + 5) - x^2(x + 5)$$

$$۸) 8x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 12x$$

$$۱۰) (2x - 1)^2 + 7(2x - 1)$$

عبارات زیر را با استفاده از روش دسته بندی تجزیه کنید.

$$۱۲) y - 8x - xy + xy^2$$

$$۱۴) x^2 + 5x^2 + 3x - 9x^2$$

$$۱۶) 5x^2 - 10x^2 + 3x - 6$$

$$۱۸) x^2 + 2x^2 + 2x + 1$$

$$۱۳) x^5 + 2x^2 + x^2 + 2$$

$$۱۵) 9y^2 - x^2 + 6x - 9$$

$$۱۷) x^2 + 2x^2 + x - xy^2$$

عبارات زیر را با افزودن و کاستن عبارت مناسب تجزیه کنید.

$$۱۹) x^2 + 5x^2 - 6$$

$$۲۰) 81x^4 + y^4$$

$$۲۱) 4x^4 + 11x^2y^2 + 9y^4$$

$$۲۲) 4x^2 + 9y^4 + 1 + 12xy^2 + 4x$$

$$۲۳) 4x^4 + y^4$$

۳-۱۹ عبارت‌های گویا و اعمال روی آن‌ها

۳-۱۹-۱ تعریف: اگر صورت و مخرج کسری چندجمله‌ای باشد، آن کسر را عبارت گویا می‌نامیم. در کسرهای گویا همیشه فرض بر این است که مخرج کسر صفر نیست.

مثال ۳۶: عبارات $\frac{x+3}{x^2-4}$ و $\frac{2x^2+x+2}{y+5}$ گویا می‌باشند، ولی عبارات $\frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$ و $\frac{2x+2}{\sqrt{x-2}}$ گویا نمی‌باشند؛ زیرا $\sqrt[3]{x}$ و $\sqrt{x-2}$ چندجمله‌ای نیستند.

ساده کردن عبارات گویا

برای ساده کردن عبارات گویا، صورت و مخرج را تجزیه کرده، سپس صورت و مخرج را بر عامل‌های مشترک در صورت و مخرج تقسیم می‌کنیم.

مثال ۳۷: عبارات داده شده را ساده کنید.

$$۱) \frac{y^2 - 4y + 4}{y^2 - 4} = \frac{(y-2)^2}{(y-2)(y+2)} = \frac{y-2}{y+2}$$

$$۲) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy} = \frac{(x-y)(x+y)}{x(x+y)} = \frac{x-y}{x}$$

$$۳) \frac{x^3 - 64}{4 - x} = \frac{(x-4)(x^2 + 4x + 16)}{(x-4)} = -x^2 - 4x - 16$$

$$۴) \frac{x^3 - 9x}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x(x^2 - 9)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x(x-3)(x+3)}{(x+2)(x+3)} \\ = \frac{x(x-3)}{(x+2)}$$

۳-۲۰ ضرب عبارت‌های گویا

برای ضرب عبارت‌های گویا، ابتدا در صورت لزوم صورت و مخرج هر کسر را تجزیه کرده، سپس عوامل مشترک را از صورت و مخرج کسرها حذف کرده و در نهایت طبق قاعده زیر کسرها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

مثال ۳۸: حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورده، سپس آن‌ها را به ساده‌ترین شکلی که ممکن است بنویسید.

$$۱) \frac{۳y}{۴x} \times \frac{۱۰x}{۳x^2y^2} = \frac{۳ \cdot xy}{۱۲x^2y^2} = \frac{۵}{۲x^2y}$$

$$۲) \frac{x-y}{x+3y} \times \frac{x^2-9y^2}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{x+3y} \times \frac{(x-3y)(x+3y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x-3y}{x+y}$$

$$\begin{aligned} ۳) \frac{4x^2-9}{x-5} \times \frac{x^2+5x}{4x^2+12x+9} \\ = \frac{(2x-3)(2x+3)}{x-5} \times \frac{x(x+5)}{(2x+3)^2} \\ = \frac{x(2x-3)}{2x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۴) \frac{t^2-2t-15}{t^2-9} \times \frac{t^2-6t+9}{12-4t} &= \frac{(t-5)(t+3)}{(t+3)(t-3)} \times \frac{(t-3)^2}{-4(t-3)} \\ &= \frac{t-5}{-4} \\ &= -\frac{1}{4}(t-5) \end{aligned}$$

۳-۲۱ جمع و تفریق عبارت‌های گویا

برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا، در صورت امکان مخرج کسرها را تجزیه کرده و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها را به عنوان مخرج مشترک کسرها انتخاب می‌کنیم. این مخرج مشترک را بر مخرج اولیه هر عبارت گویا تقسیم و حاصل را در همان عبارت گویا ضرب می‌کنیم. در نهایت کسرها را ساده می‌کنیم.

مثال ۳۹: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} ۱) \quad \frac{x-3}{3} - \frac{x-2}{2} &= \frac{2(x-3)}{6} - \frac{3(x-2)}{6} \\ &= \frac{2x-6-3x+6}{6} \\ &= \frac{-x}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲) \quad \frac{2x+1}{3x-3} + \frac{6-x}{x^2-5x+4} \\ &= \frac{2x+1}{3(x-1)} + \frac{6-x}{(x-1)(x-4)} \\ &= \frac{(2x+1)(x-4)}{3(x-1)(x-4)} + \frac{3(6-x)}{3(x-1)(x-4)} \\ &= \frac{2x^2-8x+x-4+18-3x}{3(x-1)(x-4)} \\ &= \frac{2x^2-10x+14}{3(x-1)(x-4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۳) \quad \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} &= \frac{(x+y)(x+y)}{(x-y)(x+y)} - \frac{(x-y)(x-y)}{(x-y)(x+y)} \\
 &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{(x-y)(x+y)} \\
 &= \frac{4xy}{x^2 - y^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۴) \quad \frac{x-2}{x^2+6x+9} - \frac{x+2}{2x^2-18} \\
 &= \frac{x-2}{(x+3)^2} - \frac{x+2}{2(x-3)(x+3)} \\
 &= \frac{2(x-2)(x-3)}{2(x+3)^2(x-3)} - \frac{(x+2)(x+3)}{2(x+3)^2(x-3)} \\
 &= \frac{2(x^2-5x+6) - (x^2+5x+6)}{2(x+3)^2(x-3)} \\
 &= \frac{x^2-10x+6}{2(x+3)^2(x-3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۵) \quad \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2+5x+6} \\
 &= \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{(x+3)(x+2)} \\
 &= \frac{2(x+2)}{(x+3)(x+2)} - \frac{1(x+3)}{(x+3)(x+2)} + \frac{2x}{(x+3)(x+2)} \\
 &= \frac{2x+4-x-3-2x}{(x+3)(x+2)} \\
 &= \frac{x+1}{(x+3)(x+2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۶) \quad & \frac{x+5}{x-1} - \frac{6}{x^2+x+1} - \frac{6(x^2+2)}{x^3-1} \\
 = & \frac{(x+5)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{6(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{6(x^2+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
 = & \frac{x^3+x^2+x+5x^2+5x+5-6x+6-6x^2-12}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
 = & \frac{x^3-1}{x^3-1} \\
 = & 1
 \end{aligned}$$

۳-۲۲ تقسیم عبارات گویا

برای تقسیم عبارت‌های گویا، ابتدا عبارت گویای اول را نوشته و آن را در معکوس عبارت گویای دوم ضرب کرده و سپس کسرهای را در صورت امکان تجزیه کرده و در نهایت مانند ضرب کسرهای عمل می‌کنیم.

مثال ۴۰: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned}
 ۱) \quad & \frac{x^2+9x+14}{x^2+4x-21} \div \frac{x^2-3x-10}{x^2+2x-35} \\
 = & \frac{x^2+9x+14}{x^2+4x-21} \times \frac{x^2+2x-35}{x^2-3x-10} \\
 = & \frac{(x+2)(x+7)}{(x+7)(x-3)} \times \frac{(x+7)(x-5)}{(x-5)(x+2)} \\
 = & \frac{x+7}{x-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۲) \quad \frac{x^2 - x - ۶}{x^2 + ۶x + ۹} \div \frac{x^2 - ۴}{x + ۳} &= \frac{x^2 - x - ۶}{x^2 + ۶x + ۹} \times \frac{x + ۳}{x^2 - ۴} \\
 &= \frac{(x - ۳)(x + ۲)}{(x + ۳)^2} \times \frac{x + ۳}{(x - ۲)(x + ۲)} \\
 &= \frac{x - ۳}{(x + ۳)(x - ۲)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۳) \quad \frac{x^2 - y^2}{x + y} \div \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \frac{x^2 - y^2}{x + y} \times \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \\
 &= \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x + y} \times \frac{x^2 + y^2}{(x - y)(x + y)} \\
 &= \frac{(x^2 + xy + y^2)(x^2 + y^2)}{(x + y)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ۴) \quad \frac{x^2 - y^2}{xy - ۲y^2} \div \frac{x^2 - ۲xy + y^2}{۲x^2 - ۴xy} &= \frac{x^2 - y^2}{xy - ۲y^2} \times \frac{۲x^2 - ۴xy}{x^2 - ۲xy + y^2} \\
 &= \frac{(x - y)(x + y)}{y(x - ۲y)} \times \frac{۲x(x - ۲y)}{(x - y)^2} \\
 &= \frac{۲x(x + y)}{y(x - y)}
 \end{aligned}$$

مثال ۴۱: حاصل عبارات زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\begin{aligned}
 ۱) \quad &\left(\frac{1}{۳ - x} - \frac{۳ - x}{۳ + x} \right) \div \left(\frac{1}{x^2 - ۹} \times \frac{x - ۳}{۳ - x} \right) \\
 &= \left(\frac{1(۳ + x) - (۳ - x)(۳ - x)}{(۳ - x)(۳ + x)} \right) \div \left(\frac{1}{(x - ۳)(x + ۳)} \times \frac{x - ۳}{۳ - x} \right) \\
 &= \left(\frac{۳ + x - (۹ - ۶x + x^2)}{(۳ - x)(۳ + x)} \right) \div \left(\frac{1}{(x + ۳)(۳ - x)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{7x - 6 - x^2}{(3-x)(3+x)} \right) \times (x+3)(3-x) \\
&= 7x - 6 - x^2 \\
&2) \left(\frac{x}{2+x} - \frac{2}{x} \right) \div \left(\frac{x}{2-x} + \frac{2+x}{2+x} \right) \\
&= \left(\frac{x(2-x) - 2(2+x)}{(2+x)(2-x)} \right) \div \left(\frac{x(2+x) + (2-x)(2+x)}{(2-x)(2+x)} \right) \\
&= \left(\frac{2x + x^2 - 4 - 2x}{(2+x)(2-x)} \right) \div \left(\frac{2x + x^2 + 4 - x^2}{(2-x)(2+x)} \right) \\
&= \left(\frac{x^2 - 4x - 4}{(2+x)(2-x)} \right) \div \left(\frac{2x + 4}{(2-x)(2+x)} \right) \\
&= \left(\frac{x^2 - 4x - 4}{(2+x)(2-x)} \right) \times \left(\frac{(2-x)(2+x)}{2x + 4} \right) \\
&= \frac{x^2 - 4x - 4}{2x + 4}
\end{aligned}$$

۳-۲۳ کسره‌های مرکب

۳-۲۳-۱ تعریف: کسر مرکب کسری است که در صورت یا مخرج یا در هر دو، کسره‌های دیگری وجود دارد. برای ساده کردن کسره‌های مرکب، ابتدا صورت و مخرج کسر را جداگانه ساده کرده تا تبدیل به یک کسر شود، سپس صورت را در معکوس مخرج کسر ضرب می‌کنیم.

مثال ۴۲: کسره‌های مرکب داده شده را ساده کنید.

$$1) \frac{3y - \frac{2}{y}}{3y + \frac{2}{y}} = \frac{\frac{3y^2 - 2}{y}}{\frac{3y^2 + 2}{y}} = \frac{3y^2 - 2}{y} \times \frac{y}{3y^2 + 2} = \frac{3y^2 - 2}{3y^2 + 2}$$

$$۲) \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{\frac{y-x}{xy}}{\frac{y+x}{xy}} = \frac{y-x}{xy} \times \frac{xy}{y+x} = \frac{y-x}{y+x}$$

$$۳) \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{1 + \frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{x+1-1}{x+1}}{\frac{x-1+1}{x-1}} = \frac{x}{x+1} \times \frac{x-1}{x} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} ۴) \frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}} &= \frac{\frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{(1-x)(1+x)}}{\frac{1-x-1-x}{(1-x)(1+x)}} \\ &= \frac{\frac{1+2x+x^2-1+2x-x^2}{(1-x)(1+x)}}{\frac{-2x}{(1-x)(1+x)}} \\ &= \frac{4x}{(1-x)(1+x)} \times \frac{(1-x)(1+x)}{-2x} \\ &= -2 \end{aligned}$$

تمرین

کسرهای داده شده را ساده کنید.

$$\begin{array}{ll} ۱) \frac{15x^2y^2}{25x^2y^2} & ۲) \frac{2xy}{xy+y} \\ ۳) \frac{x^2+y^2}{(x-y)^2+xy} & ۴) \frac{x-4}{2x^2-32} \end{array}$$

$$۵) \frac{x^2 - 2x^2 - 3x}{x^2 + 1}$$

$$۷) \frac{x^2 + 5x^2 + 6x}{x^2 - 4}$$

$$۶) \frac{x^2 - 3x - 28}{x^2 - 4x - 21}$$

$$۸) \frac{8x^6 + 27y^6}{8x^4 - 18y^4}$$

حاصل عبارات زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$۹) \frac{2x^2}{x^2 - y^2} + \frac{2y^2}{x^2 + xy}$$

$$۱۱) \frac{x - 1}{2x^2 - 18} + \frac{x + 2}{9x - 3x^2}$$

$$۱۳) \frac{81x^2y^5}{55zw^6} \times \frac{25z^6w^6}{18x^2y^2}$$

$$۱۵) \frac{16a^2}{x^2 - y^2} \times \frac{(x - y)^2}{16a^2}$$

$$۱۷) \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \times \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2}$$

$$۱۹) \frac{4}{x^2 + 3x - 10} - \frac{5}{x^2 + 2x - 15}$$

$$۲۰) \frac{x}{x + y} + \frac{y}{x - y} - \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$۲۱) \frac{1}{x^2 - x - 2} + \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

$$۲۲) \frac{x - y}{xy} + \frac{x - z}{xz} - \frac{z - y}{yz}$$

$$۲۳) \frac{2x + y}{2x - y} + \frac{8xy}{4x^2 - y^2} - \frac{y - 2x}{y + 2x}$$

$$۲۴) \frac{x^2 - 4y^2}{4y - 2x} \times \frac{6x - 9y}{x^2 - 2xy + y^2}$$

$$۱۰) \frac{x + 2}{x - 3} + \frac{3}{x + 2}$$

$$۱۲) \frac{x - 2y}{x + 2y} - \frac{2x - y}{2x + 1}$$

$$۱۴) \frac{81xz^2}{36y} \times \frac{12xy}{27x^2z^2}$$

$$۱۶) \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \times \frac{x^2 - xy}{x + y}$$

$$۱۸) \frac{4x^2 - 9y^2}{xy - x^2} \times \frac{x^2y - y^2}{2x - 3y^2}$$

$$۲۵) \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9}$$

$$۲۶) \frac{x^4 - y^4}{(x - y)^2} \times \frac{x - y}{x^2 + xy}$$

$$۲۷) \frac{x^2 - 5x + 6}{5x - 10} \times \frac{x^2 - 6x + 9}{15}$$

$$۲۸) \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^2 + x^2y} \div \frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{x}$$

$$۲۹) \frac{3a^2 - 2yb^2}{ax + 3bx} \div \frac{a - 3b}{x}$$

$$۳۰) \left(\frac{x+3}{4} - \frac{x+3}{x+1} \right) \div \left(\frac{x-3}{y} - \frac{x-3}{x+1} \right)$$

$$۳۱) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x} \right) \div \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right)$$

$$۳۲) \left(\frac{1}{x^2-1} \times \frac{x-1}{1-x} \right) \div \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right)$$

$$۳۳) \left(\frac{3}{x-4} - \frac{3}{x+4} \right) \div \left(1 - \frac{x^2}{x^2-16} \right)$$

$$۳۴) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x} \right) \div \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1+x} \right)$$

$$۳۵) \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}$$

$$۳۶) \frac{\frac{x-y}{x} - \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} - \frac{y}{x}}$$

$$۳۷) \frac{x}{1 + \frac{x-1}{x+1}}$$

$$۳۸) \frac{x - \frac{5x-6}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}$$

$$۳۹) \left(a^4 - \frac{1}{a^2} \right) \div \left(a^2 + \frac{1}{a} \right)$$

$$۴۰) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \div \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)$$

۳-۲۴ گویا کردن مخرج کسرها

منظور از گویا کردن مخرج یک کسر این است که کسری به دست آوریم که در مخرج رادیکال نداشته باشیم. بدین منظور به شرح زیر عمل می‌کنیم:

الف: اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt[n]{a^m}$ باشد، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.

ب: اگر مخرج کسر به صورت $a - \sqrt{b}$ باشد، صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج $a \pm \sqrt{b}$ ضرب کرده و از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

ج: اگر مخرج کسر به صورت $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ باشد، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b}$ ضرب کرده تا در مخرج کسر اتحاد $a^3 - b^3$ حاصل شود.

مثال ۴۳: گویا کنید.

$$۱) \frac{2}{\sqrt{5}}$$

حل: طبق حالت "الف" صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{5}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$۲) \frac{7}{\sqrt[3]{7}}$$

حل: طبق حالت "الف" صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[3]{7^2}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{7}{\sqrt[3]{7}} = \frac{7}{\sqrt[3]{7}} \times \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}} = \frac{7\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{7\sqrt[3]{7^2}}{7} = \sqrt[3]{7^2}$$

$$۳) \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{3}}$$

حل: طبق حالت "الف" صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3^2}$ ضرب

می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3}} &= \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3^2} \times \sqrt[3]{3^3}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3^2}}{3 \times 3} \\ &= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3^2}}{9} \end{aligned}$$

$$۴) \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

حل: طبق حالت "ب" صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج یعنی $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} &= \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{5^2} - \sqrt{3^2}} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} \\ &= \sqrt{5} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$۵) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$$

حل: طبق حالت "ب" صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج یعنی $\sqrt{7} - \sqrt{2}$

ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{\sqrt{7^2} - \sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{21} - \sqrt{6}}{7 - 2} \\ &= \frac{\sqrt{21} - \sqrt{6}}{-5} \end{aligned}$$

$$۶) \frac{۵}{۲ - \sqrt{۶}}$$

حل: طبق حالت "ب" صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج یعنی $۲ + \sqrt{۶}$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{۵}{۲ - \sqrt{۶}} &= \frac{۵}{۲ - \sqrt{۶}} \times \frac{۲ + \sqrt{۶}}{۲ + \sqrt{۶}} = \frac{۵(۲ + \sqrt{۶})}{۲^۲ - \sqrt{۶}^۲} = \frac{۱۰ + ۵\sqrt{۶}}{۴ - ۶} \\ &= \frac{۱۰ + ۵\sqrt{۶}}{۲} \end{aligned}$$

$$۷) \frac{۵}{\sqrt[۳]{۳} + \sqrt[۳]{۲}}$$

حل: طبق حالت "ج" صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[۳]{۳} - \sqrt[۳]{۶} + \sqrt[۳]{۲}$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{۵}{\sqrt[۳]{۳} + \sqrt[۳]{۲}} &= \frac{۵}{\sqrt[۳]{۳} + \sqrt[۳]{۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{۳} - \sqrt[۳]{۶} + \sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۳} - \sqrt[۳]{۶} + \sqrt[۳]{۲}} \\ &= \frac{۵(\sqrt[۳]{۳} - \sqrt[۳]{۶} + \sqrt[۳]{۲})}{\sqrt[۳]{۳}^۳ + \sqrt[۳]{۲}^۳} \\ &= \frac{۵(\sqrt[۳]{۳} - \sqrt[۳]{۶} + \sqrt[۳]{۲})}{۵} \\ &= \sqrt[۳]{۳} - \sqrt[۳]{۶} + \sqrt[۳]{۲} \end{aligned}$$

$$۸) \frac{\sqrt[۳]{۵}}{\sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۲}}$$

حل: صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sqrt[۳]{۴} + \sqrt[۳]{۸} + \sqrt[۳]{۲}$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} &= \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{4^2} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{4^2} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{2^2}} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{4^2} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{2^2})}{\sqrt[3]{4^3} - \sqrt[3]{2^3}} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{80} + \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{20}}{4 - 2} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{80} + \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{20}}{2}
 \end{aligned}$$

تمرین

عبارت‌های زیر را گویا کنید.

۱) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

۳) $\frac{11}{\sqrt[6]{13}}$

۵) $\frac{10}{\sqrt[6]{3^4}}$

۷) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y} - \sqrt{5}}$

۹) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

۱۱) $\frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

۱۳) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{2}}$

۲) $\frac{2}{4\sqrt{7}}$

۴) $\frac{4}{\sqrt[5]{7}}$

۶) $\frac{3\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[4]{5}}$

۸) $\frac{8}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$

۱۰) $\frac{\sqrt{6}}{4 - 2\sqrt{3}}$

۱۲) $\frac{y}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$

۱۴) $\frac{3}{3 + \sqrt[3]{5}}$

فصل چهارم: معادلات و نامعادلات جبری

در مسائل ریاضی زمانی که پاسخ سؤالی را ندانستیم یا نتوانستیم مقدار یک متغیر را پیدا کنیم، با تشکیل دادن معادله می‌توانیم به پاسخ سؤالمان برسیم به طوری که مقدارهای موجود را معلوم فرض کرده و مقدار عددی که مد نظرمان است را مجهول قرار می‌دهیم تا بتوانیم از این راه مقدار آن را پیدا کنیم.

معادلات پرکاربردترین بخش ریاضیات هستند. گاهی برای حل معادلات مجبور هستیم که ماهیت آن‌ها را تغییر دهیم؛ یعنی معادلات را به شکلی دیگر در بیاوریم تا حل کردن آن برایمان راحت تر باشد.

در این فصل به بررسی حل معادلات درجه اول و دوم، دستگاه‌های معادلات و حل نامعادلات می‌پردازیم.

۱-۴ معادله یک مجهولی درجه اول

۱-۴-۱ تعریف: یک تساوی جبری که شامل یک متغیر باشد، با این خاصیت که این تساوی به ازای بعضی مقادیر عددی که جای متغیر آن قرار می‌گیرد به تساوی عددی تبدیل شود، معادله یک مجهولی نامیده می‌شود.

مثال ۱: تساوی‌های زیر معادله یک مجهولی درجه اول می‌باشد.

$$6x + 8 = 4x - 3$$

$$x + 7 = 0$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{4(x-2)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{7(y-9)}{2} = 3(y-2)$$

۲-۱-۴ تعریف: مجموعه جواب یک معادله عبارت است از مقادیری که هرگاه به جای متغیر در معادله قرار گیرند، یک تساوی درست حاصل شود. منظور از حل یک معادله به دست آوردن مجموعه جواب می‌باشد.

۳-۱-۴ تعریف: شکل کلی معادله درجه اول یک متغیره به صورت $ax + b = 0$ می‌باشد، که در آن $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$.

۲-۴ روش کلی حل معادله درجه اول

- برای حل یک معادله درجه اول می‌توانیم با انجام اعمال زیر، معادله را حل کنیم:
- ۱- در صورتی که معادله شامل عملیات ضرب، تقسیم یا توان باشد، ابتدا آن اعمال را انجام می‌دهیم.
- ۲- اگر معادله شامل جمله‌های کسری باشد، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.
- ۳- تمام جمله‌های شامل مجهول را به یک طرف تساوی و تمام جمله‌های معلوم را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.
- ۴- جمله‌های طرفین معادله را با هم جمع کرده، سپس در صورت لزوم طرفین معادله را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم.
- برحسب تعداد جواب‌ها یک معادله، ممکن، غیر ممکن و مبهم نامیده می‌شود.

مثال ۲: معادله $2(x + 5) - 7 = 3(x - 2)$ را حل کنید.

حل: اعمال ضرب را در طرفین معادله انجام داده و آن را ساده می‌کنیم.

$$2x + 10 - 7 = 3x - 6$$

$$2x + 3 = 3x - 6$$

تمام جمله‌های شامل مجهول را به یک طرف تساوی و تمام جمله‌های معلوم را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

$$3x - 2x = 3 + 6$$

$$x = 9$$

این معادله درجه اول، دارای یک جواب است و آن را معادله ممکن می‌گویند.

مثال ۳: معادله $3(2x - 7) = 2(3x - 1) - 5$ را حل کنید.

حل: اعمال ضرب را در طرفین معادله انجام داده و آن را ساده می‌کنیم.

$$6x - 21 = 6x - 2 - 5$$

$$6x - 6x = 21 - 2 - 5$$

$$0 = 14$$

این معادله جواب ندارد و آن را یک معادله غیر ممکن می‌گویند.

مثال ۴: معادله $2(4x - 5) + 8x = 2(8x - 5)$ را حل کنید.

حل: اعمال ضرب را در طرفین معادله انجام داده و آن را ساده می‌کنیم.

$$8x - 10 + 8x = 16x - 10$$

$$16x - 16x = 10 - 10$$

$$0 = 0$$

معادله به صورت $0 = 0$ یا $0 \times x = 0$ در آمده است. بنابراین این معادله بی‌شمار

جواب دارد و مجموعه جواب آن مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد. این نوع معادلات را

مبهم می‌نامیم.

مثال ۵: معادله $\frac{2x+1}{3} - \frac{5x-2}{7} = x-1$ را حل کنید.

حل: طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک کسرها یعنی ۲۱ ضرب کرده، داریم:

$$\begin{aligned} 21\left(\frac{2x+1}{3} - \frac{5x-2}{7}\right) &= 21(x-1) \\ 21\left(\frac{2x+1}{3}\right) - 21\left(\frac{5x-2}{7}\right) &= 21(x-1) \\ 7(2x+1) - 3(5x-2) &= 21(x-1) \\ 14x+7-15x+6 &= 21x-21 \\ 14x-15x-21x &= -7-6-21 \\ -22x &= -34 \\ x &= \frac{-34}{-22} \\ x &= \frac{17}{11} \end{aligned}$$

مثال ۶: معادله $\frac{4x+3}{5} - \frac{2x-3}{3} = \frac{x-1}{6}$ را حل کنید.

حل: طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک کسرها عدد ۳۰ ضرب کرده، داریم:

$$\begin{aligned} 30\left(\frac{4x+3}{5} - \frac{2x-3}{3}\right) &= 30\left(\frac{x-1}{6}\right) \\ 30\left(\frac{4x+3}{5}\right) - 30\left(\frac{2x-3}{3}\right) &= 30\left(\frac{x-1}{6}\right) \\ 6(4x+3) - 10(2x-3) &= 5(x-1) \\ 24x+18-20x-30 &= 5x-5 \\ 24x-20x-5x &= -18+30-5 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

تمرین

معادلات زیر را حل کنید.

۱) $3(3x - 15) + 3(x - 19) = 0$

۲) $4 - 3x = 7x + 2$

۳) $x + 8 = 2(x - 2) - x$

۴) $-3(x + 3) = 3(1 - x) - 1$

۵) $\frac{7-x}{3} + \frac{5x-1}{6} - \frac{12-x}{12} = 0$

۶) $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{x}{6}$

۷) $\frac{5x-14}{3} + \frac{x-2}{9} = \frac{x-1}{4}$

۸) $\frac{3x}{2} + 4 = \frac{2x}{3} + \frac{3}{4}$

۹) $\frac{x-1}{5} + \frac{x-3}{15} = \frac{2x}{25}$

۱۰) $\frac{3x+1}{6} = \frac{x}{12} - \frac{1}{18}$

۳-۴ نامعادله درجه اول یک مجهولی

۳-۴-۱ تعریف: نابرابری دو عبارت جبری که شامل متغیر باشند، یک نامعادله نامیده می‌شود.

۳-۴-۲ تعریف: مجموعه مقادیری که اگر به جای متغیر نامعادله قرار گیرند، یک نامساوی درست حاصل شود، مجموعه جواب نامعادله می‌گویند.

۳-۴-۳ تعریف: شکل کلی نامعادله درجه اول یک مجهولی به یکی از صورت‌های زیر است:

$$ax + b \leq 0, \quad ax + b \geq 0, \quad ax + b < 0, \quad ax + b > 0 \quad (a \neq 0)$$

برای حل نامعادله درجه اول یک مجهولی می‌توانیم جملاتی را به طرفین معادله اضافه یا کم کنیم و یا طرفین معادله را در یک عدد ضرب یا تقسیم کنیم. (اگر عدد منفی باشد جهت نامساوی تغییر می‌کند).

۴-۳-۱ نکته: طرفین یک نامعادله را نمی‌توانیم در عبارتی که شامل متغیر باشد، ضرب یا تقسیم کنیم؛ زیرا ممکن است جوابی از نامعادله حذف و یا جوابی غیر واقعی به مجموعه جواب اضافه شود. دو مثال زیر این مطلب را توضیح می‌دهد.

مثال ۷: در نامعادله $X < X^2$ ، اگر طرفین نامعادله را بر $X > 0$ تقسیم کنیم، ظاهراً "مجموعه جواب به صورت $X < 1$ به دست می‌آید؛ در حالی که تمامی اعداد منفی در نامعادله $X < X^2$ صدق می‌کنند. حذف تعداد زیادی از جواب‌ها، به دلیل تقسیم طرفین نامعادله بر عبارتی که شامل متغیر می‌باشد، صورت گرفته است.

مثال ۸: در نامعادله $\frac{1}{X} < 1$ ، اگر طرفین نامعادله را در $X > 0$ ضرب کنیم، ظاهراً "مجموعه جواب به صورت $X < 1$ به دست می‌آید؛ در حالی که تمامی اعداد منفی در این نامعادله صدق می‌کنند. حذف تعداد زیادی از جواب‌ها، به دلیل تقسیم طرفین نامعادله بر عبارتی که شامل متغیر می‌باشد، صورت گرفته است.

مثال ۹: نامعادله $6X - 7 \geq 3X - 4$ را حل کنید.

حل: مقادیر مجهول را به سمت چپ و مقادیر معلوم را به سمت راست منتقل می‌کنیم.

$$6X - 7 \geq 3X - 4$$

$$6X - 3X \geq 7 - 4$$

$$3X \geq 3$$

$$\frac{3X}{3} \geq \frac{3}{3}$$

$$X \geq 1$$

مثال ۱۰: نامعادله $5(X - 7) + 10 \leq 2(X + 3) - 4$ را حل کنید.

حل: ابتدا نامعادله را ساده می‌کنیم. سپس مقادیر مجهول را به سمت چپ و مقادیر معلوم را به سمت راست منتقل می‌کنیم.

$$-2(x+3)-4 \leq 5(x-7)+10$$

$$-2x-6-4 \leq 5x-35+10$$

$$-2x-5x \leq 10-35+10$$

$$-7x \leq -15$$

$$\frac{-7x}{-7} \geq \frac{-15}{-7}$$

$$x \geq \frac{15}{7}$$

مثال ۱۱: نامعادله $x < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3}$ را حل کنید.

حل: ابتدا نامعادله را ساده می‌کنیم. لذا کافی است طرفین نامعادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها یعنی عدد ۶ ضرب کنیم. سپس مقادیر مجهول را به سمت چپ و مقادیر معلوم را به سمت راست منتقل می‌کنیم.

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} < x$$

$$6\left(\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3}\right) < 6x$$

$$3(x-1) - 2(x-2) < 6x$$

$$3x-3-2x+4 < 6x$$

$$x+1 < 6x$$

$$x-6x < -1$$

$$-5x < -1$$

$$\frac{-5x}{-5} > \frac{-1}{-5}$$

$$x > \frac{1}{5}$$

مثال ۱۲: نامعادله $\frac{5x-7}{3} \geq \frac{4x-1}{9} - \frac{2x-6}{6}$ را حل کنید.

حل: برای حل این نامعادله طرفین نامعادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها یعنی عدد ۱۸ ضرب می‌کنیم. سپس مقادیر مجهول را به سمت چپ و مقادیر معلوم را به سمت راست منتقل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{5x-7}{3} &\geq \frac{4x-1}{9} - \frac{2x-6}{6} \\ 18\left(\frac{5x-7}{3}\right) &\geq 18\left(\frac{4x-1}{9} - \frac{2x-6}{6}\right) \\ 18\left(\frac{5x-7}{3}\right) &\geq 18\left(\frac{4x-1}{9}\right) - 18\left(\frac{2x-6}{6}\right) \\ 6(5x-7) &\geq 2(4x-1) - 3(2x-6) \\ 30x-42 &\geq 8x-2-6x+18 \\ 30x-8x+6x &\geq 42-2+18 \\ 28x &\geq 58 \\ x &\geq \frac{58}{28} \\ x &\geq \frac{29}{14}\end{aligned}$$

تمرین

نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} ۱) -2(4x-10) \geq 5(2x-8) & ۲) 6-8x \leq 3x-8 \\ ۳) 2x-8 < 3(x-3) + 5x & ۴) 2(x-4) - 5(2-6x) > -4 \\ ۵) \frac{2x}{4} - 5 \leq \frac{3x}{2} - \frac{1}{4} & ۶) \frac{3x}{2} \geq \frac{2x-1}{3} - \frac{x}{6}\end{array}$$

$$۷) \frac{x+1}{3} + \frac{2x-1}{4} \geq \frac{1-x}{2} + x$$

$$۸) \frac{2x-5}{2} - \frac{3x-7}{5} < \frac{-x+1}{10}$$

$$۹) 28 - \frac{27}{2}x \leq \frac{7(x-1)}{5}$$

$$۱۰) \frac{x+5}{3} - \frac{7x-1}{2} < \frac{7}{5}x + \frac{16}{5}$$

۴-۴ تعیین علامت عبارت درجه اول $ax + b$

منظور از تعیین علامت دوجمله‌ای $ax + b$ ، تعیین فواصلی است که در آن‌ها دوجمله‌ای مثبت یا منفی است.

برای تعیین علامت این عبارت، معادله $ax + b = 0$ را حل کرده و جواب معادله را $x = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آوریم. حال مطابق جدول زیر تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	مخالف علامت a $\cdot$ موافق علامت a		

مثال ۱۳: عبارت $6x$ را تعیین علامت کنید.

حل: عبارت $6x$ را مساوی صفر قرار داده، لذا داریم $x = \frac{0}{6} = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$6x$	$-$	0	$+$

با توجه به جدول، عبارت فوق در فاصله $(-\infty, 0)$ منفی و در فاصله $(0, +\infty)$ مثبت و به ازای $x = 0$ ، صفر است.

مثال ۱۴: دوجمله‌ای $-12x + 24$ را تعیین علامت کنید.

حل: اگر $-12x + 24 = 0$ ، آن‌گاه داریم $-12x = -24$ ، لذا نتیجه می‌گیریم که

$x = \frac{-24}{-12} = 2$ و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-12x + 24$	$+$	0	$-$

با توجه به جدول، عبارت $-12x + 24$ به ازای $x \in (-\infty, 2)$ مثبت و به ازای $x \in (2, +\infty)$ منفی و به ازای $x = 2$ ، صفر خواهد شد.

۴-۴-۱ نکته: برای تعیین علامت عبارت p که به صورت حاصل ضرب یا تقسیم دوجمله‌ای‌های درجه اول است، هر یک از دوجمله‌ای‌ها را مساوی صفر قرار داده، جواب معادله‌های حاصل را به دست آورده و تعیین علامت می‌کنیم. علامت p در هر فاصله به صورت حاصل ضرب علامت‌های این دوجمله‌ای‌ها خواهد بود.

مثال ۱۵: عبارت $p = (2x - 6)(5 - x)$ را تعیین علامت کنید.

حل: هر یک از دوجمله‌ای‌های $2x - 6$ و $5 - x$ را در یک جدول تعیین علامت کرده، سپس از ضرب علامت‌های دو عبارت، علامت p را تعیین می‌کنیم.
اگر عبارت $(2x - 6)(5 - x) = 0$ ، آن‌گاه $2x - 6 = 0$ یا $5 - x = 0$. بنابراین جواب‌های این معادله $x = 3$ یا $x = 5$ خواهد بود.

x	$-\infty$	3	5	$+\infty$
$2x - 6$	$-$	0	$+$	$+$
$5 - x$	$+$	$+$	0	$-$
p	$-$	$+$	$-$	$-$

با توجه به جدول، عبارت $p = (2x - 6)(5 - x)$ به ازای $x \in (3, 5)$ مثبت، به ازای $x \in (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$ منفی و به ازای $x = 3$ و $x = 5$ ، صفر خواهد شد.

مثال ۱۶: عبارت $p = \frac{7 - 21x}{4x - 8}$ را تعیین علامت کنید.

حل: علامت دو جمله‌ای واقع در صورت و مخرج را در یک جدول تعیین کرده، سپس از ضرب علامت‌های دو عبارت در هر فاصله، علامت p را تعیین می‌کنیم.

اگر $7 - 21x = 0$ ، آن‌گاه $21x = 7$. لذا نتیجه می‌گیریم $x = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$. همچنین در صورتی که $4x - 8 = 0$ ، آن‌گاه داریم: $4x = 8$. بنابراین داریم $x = 2$ و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$7 - 21x$	+	۰	-	-
$4x - 8$	-	-	۰	+
p	-	۰	+	-

با توجه به جدول، عبارت فوق به ازای $x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (2, +\infty)$ منفی، به

ازای $x \in (\frac{1}{3}, 2)$ مثبت، به ازای $x = \frac{1}{3}$ صفر و به ازای $x = 2$ تعریف نشده یا نامعین است که آن را با نماد ∞ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۷: عبارت $p = \frac{(4-2x)(3x-9)}{-x-8}$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا علامت صورت و مخرج کسر را در یک جدول تعیین کرده، سپس از ضرب علامت‌های دو عبارت در هر فاصله، علامت p را تعیین می‌کنیم.

اگر عبارت $(4-2x)(3x-9) = 0$ ، آن‌گاه $4-2x = 0$ یا $3x-9 = 0$. بنابراین جواب‌های این معادله $x = 2$ یا $x = 3$ خواهد بود.

همچنین اگر $-x-8 = 0$ ، آن‌گاه $x = -8$ و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\lambda$	2	3	$+\infty$		
$4-2x$	+		+	•	-		-
$3x-9$	-	•	-		-	•	+
$-x-\lambda$	+	•	-		-		-
p	-	∞	+	•	-	•	+

با توجه به جدول عبارت فوق به ازای $x \in (-\infty, -8) \cup (2, 3)$ منفی و به ازای $x \in (-8, 2) \cup (3, +\infty)$ مثبت، در $x = 2$ و $x = 3$ ، صفر و در $x = -8$ تعریف نشده یا نامعین است.

۴-۴-۲ نکته: تعیین علامت عبارت‌ها این امکان را به ما می‌دهد تا بتوانیم کلیه نامعادلات را حل کنیم. بدین منظور برای حل نامعادله $p > 0$ ، $p < 0$ ، $p \leq 0$ یا $p \geq 0$ علامت عبارت p را تعیین می‌کنیم. با توجه به علامت p جواب نامعادله مشخص می‌گردد.

مثال ۱۸: مجموعه جواب نامعادله $-3x + 6 < 0$ را با استفاده از جدول تعیین علامت به دست آورید.

حل: قرار می‌دهیم: $p = -3x + 6$ و آن را تعیین علامت می‌کنیم. اگر عبارت $-3x + 6 = 0$ ، آن‌گاه $-3x = -6$ ، لذا نتیجه می‌گیریم $x = 2$ و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
$-3x + 6$	-	۰	+
p	جواب		

همان‌طور که جدول نشان می‌دهد عبارت فوق وقتی منفی خواهد شد که x متعلق به فاصله $(-\infty, 2)$ باشد.

مثال ۱۹: مجموعه جواب نامعادله $\frac{x-7}{2} - \frac{2x}{3} \leq x$ را با استفاده از جدول تعیین علامت به دست آورید.

حل: کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها ۶ است. دو طرف نامعادله را در این کوچک‌ترین مضرب مشترک ضرب کرده و ساده می‌کنیم.

$$6\left(\frac{x-7}{2} - \frac{2x}{3}\right) \leq 6x$$

$$3(x-7) - 2(2x) \leq 6x$$

$$3x - 21 - 4x \leq 6x$$

$$3x - 4x - 6x - 21 \leq 0$$

$$-7x - 21 \leq 0$$

قرار می‌دهیم: $p = -7x - 21$ و آن را تعیین علامت می‌کنیم. بنابراین اگر $-7x - 21 = 0$ ، آن‌گاه داریم: $-7x = 21$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $x = -3$ و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$-7x - 21$	+	۰	-
p	غیر قابل قبول		جواب

همان‌طور که جدول نشان می‌دهد، عبارت فوق وقتی منفی یا صفر خواهد شد که x متعلق به فاصله $(-3, +\infty)$ باشد.

مثال ۲۰: مجموعه جواب نامعادله $6 + (x - 8) - 3 > 2(2x - 5) - 3x$ را با استفاده از جدول تعیین علامت به دست آورید.

حل: عبارت داده شده را ساده کرده و همه جملات را به یک طرف نامساوی انتقال می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$3x - 4x + 10 > -3x + 24 + 6$$

$$3x - 4x + 3x + 10 - 24 - 6 > 0$$

$$2x - 20 > 0$$

قرار می‌دهیم: $p = 2x - 20$ و آن را تعیین علامت می‌کنیم. لذا اگر عبارت

$$2x - 20 = 0, \text{ آن‌گاه داریم: } 2x = 20. \text{ بنابراین نتیجه می‌گیریم } x = \frac{20}{2} = 10.$$

x	$-\infty$	۱۰	$+\infty$
$2x - 20$	-	۰	+
p	غیر قابل قبول		جواب

با توجه به جدول می‌توان نتیجه گرفت که عبارت داده شده وقتی مثبت خواهد شد که x متعلق به فاصله $(10, +\infty)$ باشد.

مثال ۲۱: مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x+7}{10} - \frac{x-9}{3} \geq \frac{2x-5}{5}$ را با استفاده از جدول تعیین علامت به دست آورید.

حل: کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها ۳۰ است. جملات دو طرف نامعادله را در این کوچک‌ترین مضرب مشترک ضرب کرده و ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 30 \left(\frac{3x+7}{10} - \frac{x-9}{3} \right) &\geq 30 \left(\frac{2x-5}{5} \right) \\ 3(3x+7) - 10(x-9) &\geq 6(2x-5) \\ 9x + 21 - 10x + 90 &\geq 12x - 30 \\ 9x - 10x - 12x + 21 + 90 + 30 &\geq 0 \\ -13x + 141 &\geq 0 \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم: $p = -13x + 141$ و آن را تعیین علامت می‌کنیم. اگر عبارت

$$-13x + 141 = 0, \quad \text{آن‌گاه: } -13x = -141. \quad \text{بنابراین داریم } x = \frac{141}{13} \text{ و جدول}$$

تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$\frac{141}{13}$	$+\infty$
$-13x + 141$	+	۰	-
P	جواب		غیرقابل قبول

با توجه به جدول می‌توان نتیجه گرفت که عبارت فوق وقتی مثبت یا صفر خواهد

شد که x متعلق به فاصله $[-\infty, \frac{141}{13}]$ باشد.

تمرین

عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $-4x$

۲) $10x - 5$

۳) $-x - 24$

۴) $-7x + 28$

۵) $(-6x - 18)(5x + 10)$

۶) $(4x - 8)(12 - 6x)(5 - 15x)$

۷) $\frac{9x - 18}{-11x + 22}$

۸) $\frac{4x + 1}{(-2x - 2)(8x - 4)}$

مجموعه جواب نامعادلات را با استفاده از جدول تعیین علامت به دست آورید.

۹) $3(5x - 2) - 4(5x - 8) \geq 0$

۱۰) $2 - 3x \geq 2x - 4$

۱۱) $2x - 6 + 5(2x - 5) \geq 5x$

۱۲) $3(2x - 4) - 5(2 - 6x) < 0$

۱۳) $\frac{3x}{8} - 2 + \frac{x}{2} < \frac{1}{16}$

۱۴) $\frac{2x}{4} \leq \frac{3x - 1}{3} - \frac{2x}{6}$

۱۵) $\frac{4x - 10}{5} \geq \frac{x - 3}{15} - \frac{2x + 1}{3}$

۱۶) $\frac{x - 8}{7} < \frac{2x - 1}{2} - \frac{3x - 6}{14}$

۱۷) $\frac{2x - 1}{5} + \frac{x - 4}{2} \leq \frac{x + 2}{10}$

۱۸) $\frac{x}{2} < \frac{3x - 4}{2} - \frac{x - 1}{16}$

۱۹) $\frac{3x - 10}{4} \geq \frac{x}{8} - \frac{4x + 2}{2}$

۲۰) $\frac{-x - 4}{25} < -\frac{2x}{5} - \frac{-6}{10}$

۲۱) $\frac{4x - 10}{5} \geq \frac{x - 3}{15} - \frac{2x}{3}$

۲۲) $\frac{x - 8}{7} < \frac{2x - 1}{2} - \frac{3x - 6}{14}$

۲۳) $\frac{x + 1}{6} - \frac{2x - 2}{72} \geq 1$

۲۴) $\frac{3x - 1}{9} - \frac{5x}{36} \geq \frac{-2x - 4}{18}$

۴-۵ معادلات گویا

۴-۵-۱ تعریف: معادله گویا، معادله‌ای است کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد.

۴-۵-۱ نکته: برای حل معادلات گویا، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب کرده، حاصل را ساده می‌کنیم. با این کار معادله را از شکل کسری خارج کرده و به شکل چندجمله‌ای در می‌آوریم. پس از حل این معادله جدید، جواب‌ها را در معادله اصلی قرار می‌دهیم. جواب‌هایی که در معادله صدق می‌کنند قابل قبول هستند.

مثال ۲۲: معادله $\frac{7}{x-3} - \frac{4}{x-5} = \frac{3}{x+1}$ را حل کنید.

حل: کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرهای $(x-3)(x-5)(x+1)$ است.

جملات دو طرف معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک ضرب می‌کنیم. داریم:

$$(x-3)(x-5)(x+1) \left(\frac{7}{x-3} - \frac{4}{x-5} \right) = (x-3)(x-5)(x+1) \frac{3}{x+1}$$

$$(x-5)(x+1)(7) - (x-3)(x+1)(4) = (x-3)(x-5)(3)$$

$$7x^2 - 28x - 35 - 4x^2 + 8x + 12 = 3x^2 - 24x + 45$$

$$3x^2 - 20x - 23 = 3x^2 - 24x + 45$$

$$4x = 68$$

$$x = 17$$

عدد ۱۷ مخرج هیچ کدام از کسرهای معادله اصلی را صفر نمی‌کند، بنابراین جواب معادله می‌باشد.

مثال ۲۳: معادله $\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^2+x}$ را حل کنید.

حل: کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرهای $x(x+1)$ است. جملات دو طرف

معادله را در این کوچک‌ترین مضرب مشترک ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}
 x(x+1)\left(\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) &= x(x+1)\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right) \\
 x(x+1)\left(\frac{x-1}{x}\right) - x(x+1)\left(\frac{1}{x+1}\right) &= x(x+1)\left(\frac{2x-1}{x(x+1)}\right) \\
 (x+1)(x-1) - x &= 2x-1 \\
 x^2 - 1 - x &= 2x-1 \\
 x^2 - 3x &= 0
 \end{aligned}$$

اگر $x^2 - 3x = 0$. آن‌گاه با تجزیه این عبارت داریم $x(x-3) = 0$ ، بنابراین جواب‌های معادله $x = 0$ یا $x = 3$ خواهد بود.

چون $x = 0$ مخرج یکی از کسرهای معادله اصلی را صفر می‌کند، پس غیر قابل قبول است و $x = 3$ تنها جواب معادله می‌باشد.

مثال ۲۴: معادله $\frac{3x}{x-2} - \frac{2x}{x+2} = \frac{5x-6}{x^2-4}$ را حل کنید.

کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها $(x-2)(x+2)$ است. جملات طرفین معادله را در این کوچک‌ترین مضرب مشترک ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}
 (x-2)(x+2)\left(\frac{3x}{x-2} - \frac{2x}{x+2}\right) &= (x-2)(x+2)\left(\frac{5x-6}{(x-2)(x+2)}\right) \\
 (x+2)(3x) - (x-2)(2x) &= 5x-6 \\
 3x^2 + 6x - 2x^2 + 4x &= 5x-6 \\
 x^2 + 5x + 6 &= 0
 \end{aligned}$$

اگر عبارت $x^2 + 5x + 6 = 0$ ، آن‌گاه با تجزیه این عبارت به دست می‌آوریم $(x+2)(x+3) = 0$. لذا جواب‌های این معادله $x = -2$ یا $x = -3$ است.

چون $x = -2$ مخرج یکی از کسرهای معادله اصلی را صفر می‌کند، پس غیر قابل قبول است و $x = -3$ تنها جواب معادله می‌باشد.

تمرین

معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{۲}{x-۴} - \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x+۱} = ۰$$

$$۲) \frac{۲}{x-۵} + \frac{x-۱}{x+۴} = ۱$$

$$۳) \frac{x-۳}{x} + \frac{x}{x-۱} = ۱$$

$$۴) \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x+۲} = ۰$$

$$۵) \frac{۸x-۳}{x+۳} - ۲x = ۴ - \frac{۳x^۲}{x+۳}$$

$$۶) \frac{۱}{x-۳} + \frac{۱}{x+۳} = \frac{۱۰}{x^۲-۹}$$

$$۷) \frac{x^۲}{x-۱} - \frac{x^۲}{x+۱} = \frac{۲x}{x^۲-۱}$$

$$۸) \frac{۱}{x-۲} + \frac{۳}{x+۳} = \frac{۴}{x^۲+x-۶}$$

$$۹) \frac{x}{x^۲-۴} + \frac{۱}{x+۲} = ۳$$

$$۱۰) \frac{x+۳}{x+۲} - \frac{x+۲}{x+۳} = \frac{x^۲-۷۵}{x^۲+۵x+۶}$$

۴-۶ دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول

۴-۶-۱ تعریف: هر گاه دو معادله درجه اول دو مجهولی $ax + by = c$ و

$a'x + b'y = c'$ به طور هم زمان در نظر گرفته شوند آن را یک دستگاه دو معادله

دو مجهولی درجه اول نامیده و آن را به شکل زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

دستگاه دو معادله دو مجهول را به روش های گوناگونی می توان حل کرد که در

ادامه به معرفی روش حذفی و جایگزینی با ذکر چند مثال می پردازیم.

۷-۴ روش حذفی

در این روش، معادله‌های دستگاه در اعداد مناسبی ضرب می‌شوند به گونه‌ای که ضرایب یکی از مجهولات در دو معادله دستگاه قرینه یکدیگر شوند. سپس با جمع دو معادله جدید، معادله‌ای یک مجهولی به دست می‌آوریم. از حل معادله حاصل یکی از مجهول‌ها محاسبه می‌شود. با قرار دادن مقدار این مجهول در یکی از معادله‌ها مقدار مجهول دوم نیز معین می‌شود.

$$\text{مثال ۲۵: دستگاه معادلات} \begin{cases} 2x - 2y = 10 \\ 5x + y = 1 \end{cases} \text{ را حل کنید.}$$

حل: طرفین معادله دوم را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم تا ضریب y در دو معادله قرینه شود.

$$\begin{cases} 2x - 2y = 10 \\ 10x + 2y = 2 \end{cases}$$

سپس دو معادله را با هم جمع می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$(2x - 2y) + (10x + 2y) = 10 + 2$$

$$12x = 12$$

$$x = 1$$

مقدار $x = 1$ را به دلخواه در معادله $2x - 2y = 10$ قرار می‌دهیم. داریم:

$$2(1) - 2y = 10$$

$$-2y = 8$$

$$y = -4$$

مقادیر $x = 1$ و $y = -4$ جواب دستگاه معادلات می‌باشند. زیرا در هر دو معادله دستگاه صدق می‌کنند.

مثال ۲۶: دستگاه معادلات $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ را حل کنید.

حل: کافی است طرفین معادله اول در عدد ۳ و طرفین معادله دوم در عدد ۴ ضرب شود تا ضریب y در دو معادله قرینه شود.

$$\begin{cases} 9x - 12y = 3 \\ 8x + 12y = 48 \end{cases}$$

دو معادله را با هم جمع می‌کنیم.

$$(9x - 12y) + (8x + 12y) = 3 + 48$$

$$17x = 51$$

$$x = 3$$

مقدار $x = 3$ را در معادله $3x - 4y = 1$ در دستگاه اولیه قرار می‌دهیم. داریم:

$$3(3) - 4y = 1$$

$$-4y = -8$$

$$y = 2$$

مقادیر $x = 3$ و $y = 2$ جواب دستگاه معادلات می‌باشند. زیرا در هر دو معادله دستگاه صدق می‌کنند.

مثال ۲۷: دستگاه معادلات $\begin{cases} \frac{9x}{2} - \frac{2y}{3} = 7 \\ \frac{x}{2} - \frac{2y}{5} = -\frac{2}{10} \end{cases}$ را حل کنید.

حل: طرفین معادله اول را در عدد ۶ و طرفین معادله دوم در عدد ۱۰ ضرب کرده تا ضریب y در دو معادله قرینه شود.

$$\begin{cases} 27x - 4y = 42 \\ -5x + 4y = 2 \end{cases}$$

سپس دو معادله را با هم جمع می‌کنیم.

$$(27x - 4y) + (-5x + 4y) = 42 + 2$$

$$22x = 44$$

$$x = 2$$

مقدار $x = 2$ را به دلخواه در معادله $5x - 4y = -2$ قرار می‌دهیم. داریم:

$$5(2) - 4y = -2$$

$$-4y = -12$$

$$y = 3$$

مثال ۲۸: دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{2y}{5} = 19 \\ 4x + \frac{3y}{2} = 21 \end{cases} \text{ را حل کنید.}$$

حل: طرفین معادله اول را در عدد ۱۵ و طرفین معادله دوم در عدد ۲ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌های دو معادله حذف شوند.

$$\begin{cases} 25x - 6y = 285 \\ 8x + 3y = 42 \end{cases}$$

سپس معادله دوم را در عدد ۲ ضرب کرده تا ضریب y در دو معادله قرینه شود.

$$\begin{cases} 25x - 6y = 285 \\ 16x + 6y = 84 \end{cases}$$

در نهایت دو معادله را با هم جمع می‌کنیم.

$$(25x - 6y) + (16x + 6y) = 285 + 84$$

$$41x = 369$$

$$x = 9$$

مقدار $x = 9$ را به دلخواه در معادله قرار $8x + 3y = 42$ می‌دهیم. داریم:

$$8(9) + 3y = 42$$

$$3y = -30$$

$$y = -10$$

تمرین

دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} 7x - 4y = 0 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

$$۴) \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

$$۵) \begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

$$۶) \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$۷) \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 6x - 10y = 1 \end{cases}$$

$$۸) \begin{cases} 5x + y = 1 \\ 15x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$۹) \begin{cases} \frac{5x}{3} + \frac{3y}{5} = 10 \\ \frac{2x}{5} + \frac{y}{3} = \frac{43}{15} \end{cases}$$

$$۱۰) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y-1}{5} = 2 \\ \frac{1-x}{2} + y = -2 \end{cases}$$

$$۱۱) \begin{cases} \frac{9x}{7} - \frac{2y}{3} = -28 \\ \frac{3x}{2} + \frac{12y}{5} = 15 \end{cases}$$

$$۱۲) \begin{cases} -\frac{x}{5} + y = \frac{-2x-3}{5} \\ x + 3y = \frac{15-9y}{14} \end{cases}$$

۸-۴ معادلات درجه دوم

۴-۸-۱ تعریف: شکل کلی معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشد که در آن a, b, c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ است. اگر b یا c صفر باشند معادله را درجه دوم ناقص می‌نامند و می‌توان معادله را با استفاده از تجزیه یا فاکتورگیری حل کرد.

مثال ۲۹: معادله $5x^2 - 1 = 0$ را حل کنید.

حل: ابتدا طرف چپ معادله را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم. لذا داریم $(5x+1)(5x-1) = 0$ ، بنابراین $5x-1=0$ یا $5x+1=0$. در نتیجه جواب‌های این

معادله $x = \frac{1}{5}$ یا $x = -\frac{1}{5}$ خواهد بود.

مثال ۳۰: معادله $4x^2 - 16x = 0$ را حل کنید.

حل: از عامل مشترک فاکتور گرفته داریم: $4x(x-4) = 0$. بنابراین $4x = 0$ یا $x-4=0$. لذا جواب‌های این معادله $x = 0$ یا $x = 4$ خواهد بود.

مثال ۳۱: جواب معادله $x^2 + 8 = 0$ را در صورت وجود بیابید.

حل: داریم $x^2 + 8 = 0$ ، لذا $x^2 = -8$ و این غیر ممکن است. لذا این معادله در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارد.

مثال ۳۲: معادله $x^2 + 5x + 6 = 0$ را حل کنید.

حل: طرف چپ معادله را با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه کرده، داریم: $(x+2)(x+3) = 0$. پس $x+2=0$ یا $x+3=0$. در نتیجه جواب‌های معادله $x = -2$ یا $x = -3$ خواهد بود.

مثال ۳۳: معادله $x^2 + 8x + 16 = 0$ را حل کنید.

حل: معادله را با استفاده از اتحاد مربع تجزیه کرده، داریم: $(x+4)^2 = 0$ ، بنابراین $x+4=0$. لذا جواب معادله $x=-4$ خواهد بود.

۴-۸-۱ نکته: بعضی مواقع نمی‌توان معادلات درجه دو را با استفاده از تجزیه یا فاکتورگیری حل کرد. بنابراین روشی کلی ارائه می‌کنیم که با استفاده از آن می‌توانیم ریشه تمامی معادلات درجه دوم را به دست آوریم.

روش کلی حل معادله درجه دوم

برای حل معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ابتدا عبارت b^2-4ac را که مبین معادله درجه دوم نام دارد و با Δ نشان داده می‌شود، محاسبه می‌کنیم. برای Δ سه حالت امکان دارد:

الف: $\Delta > 0$ ؛ در این حالت معادله درجه دوم دارای دو جواب حقیقی یا دو ریشه متمایز است. این ریشه‌ها را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب: $\Delta = 0$ ؛ در این حالت معادله دارای یک جواب به صورت $x = \frac{-b}{2a}$ است. این ریشه را ریشه مضاعف یا ریشه تکراری می‌نامیم.

ج: $\Delta < 0$ ؛ در این حالت معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال ۳۴: معادله $4x^2 - 3x - 1 = 0$ را حل کنید.

حل: معادله فوق یک معادله درجه دوم کامل با $a=4$ ، $b=-3$ و $c=-1$ می‌باشد. بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(4)(-1) = 25 > 0$$

در نتیجه معادله دارای دو ریشه متمایز به صورت زیر می باشد:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2(4)} = \frac{3+5}{8} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2(4)} = \frac{3-5}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

مثال ۳۵: معادله $-x^2 + 8x = 15$ را حل کنید.

حل: معادله را به شکل استاندارد $-x^2 + 8x - 15 = 0$ می نویسیم. در این معادله

$a = -1$ ، $b = 8$ و $c = -15$ می باشد. بنابراین داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(-1)(-15) = 4 > 0$$

در نتیجه معادله دارای دو ریشه متمایز به صورت زیر می باشد:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-8+2}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-8-2}{-2} = 5$$

مثال ۳۶: معادله $x^2 + 10x + 25 = 0$ را حل کنید.

حل: معادله فوق یک معادله درجه دوم کامل با $a = 1$ ، $b = 10$ و $c = 25$

می باشد. بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (10)^2 - 4(1)(25) = 0$$

در نتیجه معادله دارای ریشه مضاعف به صورت زیر می باشد:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-10}{2} = -5$$

مثال ۳۷: معادله $3x^2 - 2x + 1 = 0$ را حل کنید.

حل: معادله فوق یک معادله درجه دوم کامل با $a = 3$ ، $b = -2$ و $c = 1$ می‌باشد؛ بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(1) = -8 < 0$$

چون $\Delta < 0$ ، معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال ۳۸: معادله $(x-1)^2 = 2+x$ را حل کنید.

حل: ابتدا طرف چپ معادله را با استفاده از اتحاد مربع ساده می‌کنیم.

$$x^2 - 2x + 1 = 2 + x$$

$$x^2 - 2x - x + 1 - 2 = 0$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک معادله درجه دوم کامل با $a = 1$ ، $b = -3$ و $c = -1$ می‌باشد. بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-1) = 13 > 0$$

در نتیجه معادله دارای دو ریشه متمایز به صورت زیر می‌باشد.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{13}}{2(1)} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{13}}{2(1)} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

مثال ۳۹: معادله $(x+2)^2 + 4 + x^2 = 0$ را حل کنید.

حل: ابتدا طرف چپ معادله را با استفاده از اتحاد مربع ساده کرده و سپس معادله را حل می‌کنیم.

$$x^2 + 4x + 4 + 4 + x^2 = 0$$

$$2x^2 + 4x + 8 = 0$$

معادله $2x^2 + 4x + 8 = 0$ ، یک معادله درجه دو با $a = 2$ ، $b = 4$ و $c = 8$

می‌باشد. بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(2)(8) = -48 < 0$$

چون $\Delta < 0$ ، معادله ریشه حقیقی ندارد.

تمرین

معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

$$۱) ۱۶x^2 - 4x = 0$$

$$۲) -x^2 + 6x = 0$$

$$۳) ۱۲ + 3x^2 = 0$$

$$۴) 9 - x^2 = 0$$

$$۵) x^2 + x - 3 = 0$$

$$۶) x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$۷) 4x^2 = 8x - 3$$

$$۸) 2x^2 - 4x = -5$$

$$۹) \sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$$

$$۱۰) 3x^2 - 2\sqrt{3}x = -1$$

$$۱۱) (2x + 5)^2 + 90 = (5x - 3)(x - 5)$$

$$۱۲) x(x - 1) + (x + 1)(x + 2) = 0$$

$$۱۳) (x - 3)^2 + 10 - x(x - 2) = 0$$

$$۱۴) 2(x - 2) = (x - 2)^2 - 15$$

$$۱۵) (x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2$$

$$۱۶) (x - 1)^2 - 2(x + 3)^2 = 5$$

۹-۴ تعیین علامت عبارت جبری درجه دوم $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

برای تعیین علامت عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ ، ابتدا آن را مساوی صفر قرار داده، Δ را تشکیل داده، سپس معادله را حل می‌کنیم. سه حالت زیر به وجود می‌آید:

الف: $\Delta > 0$ ؛ در این حالت معادله درجه دوم دارای دو جواب حقیقی یا دو ریشه متمایز x_1 و x_2 است و تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	X_1	X_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	•	مخالف علامت a	•	موافق علامت a

ب: $\Delta = 0$ ؛ در این حالت معادله درجه دوم دارای یک ریشه مضاعف x_1 است و تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	•	موافق علامت a

ج: $\Delta < 0$ ؛ در این حالت معادله ریشه حقیقی ندارد و علامت آن همان علامت a است.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	همواره موافق علامت a	

مثال ۴۰: عبارت $3x^2 + 6x$ را تعیین علامت کنید.

حل: عبارت درجه دوم $3x^2 + 6x$ را مساوی صفر قرار داده و از عامل مشترک

فاکتور گرفته، داریم $3X(X+2)=0$. بنابراین $3X=0$ یا $X+2=0$. لذا جواب‌های معادله $X=0$ یا $X=-2$ خواهد بود و تعیین علامت آن مطابق حالت "الف" به صورت جدول زیر است:

X	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$3X^2+6X$	+	•	-	•	+

با توجه به جدول تغییرات، علامت عبارت روی فاصله $(-\infty, -2)$ و $(0, +\infty)$ مثبت و روی فاصله $(-2, 0)$ منفی است.

مثال ۴۱: سه‌جمله‌ای درجه دوم $X^2 - 5X + 6$ را تعیین علامت کنید.

حل: سه‌جمله‌ای $X^2 - 5X + 6$ را مساوی صفر قرارداد و معادله را با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه کرده، داریم $(X-3)(X-2)=0$. بنابراین $X-2=0$ یا $X-3=0$. لذا جواب‌های این معادله $X=2$ یا $X=3$ خواهد بود و تعیین علامت آن طبق حالت "الف" به صورت جدول زیر است:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$

با توجه به جدول تغییرات، علامت عبارت روی فاصله $(-\infty, 2)$ و $(3, +\infty)$ مثبت و روی فاصله $(2, 3)$ منفی است.

مثال ۴۲: دو جمله‌ای $6X^2 + 24$ را تعیین علامت کنید.

حل: عبارت $6X^2 + 24$ را مساوی صفر قرار داده، لذا داریم: $6X^2 = 24$. بنابراین $X^2 = 4$. پس جواب‌های معادله $X=2$ یا $X=-2$ خواهد بود و تعیین علامت آن طبق حالت "الف" به صورت جدول داده شده است:

X	$-\infty$	-2	$+2$	$+\infty$
$-6X^2 + 24$		-	+	-

با توجه به جدول فوق، علامت عبارت $-6X^2 + 24$ روی فاصله $(-\infty, -2)$ و $(2, +\infty)$ منفی و روی فاصله $(-2, 2)$ مثبت است.

مثال ۴۳: سه جمله‌ای درجه دوم $12X^2 - 48X + 48$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا سه جمله‌ای $12X^2 - 48X + 48$ را مساوی صفر قرارداد و از عامل مشترک فاکتور می‌گیریم. داریم $12(X^2 - 4X + 4) = 0$. سپس با استفاده از اتحاد مربع داریم $12(X - 2)^2 = 0$. لذا معادله دارای ریشه مضاعف $X = 2$ خواهد بود و تعیین علامت آن طبق حالت "ب" به صورت جدول زیر است:

X	$-\infty$	2	$+\infty$
$12X^2 - 48X + 48$		+	+

با توجه به جدول تغییرات، علامت عبارت همواره مثبت است.

مثال ۴۴: علامت عبارت $-6X^2$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا معادله $-6X^2 = 0$ را حل کرده، داریم $X = 0$. لذا معادله دارای ریشه مضاعف $X = 0$ است و تعیین علامت آن طبق حالت "ب" به صورت زیر است:

X	$-\infty$	0	$+\infty$
$-6X^2$		-	-

همان‌طور که جدول نشان می‌دهد، علامت عبارت همواره منفی است.

مثال ۴۵: عبارت جبری $۱۲x^2 + 4$ را تعیین علامت کنید.

حل: عبارت $۱۲x^2 + 4$ را مساوی صفر قرار داده، نتیجه می‌گیریم $۱۲x^2 = -4$ ،

بنابراین $x^2 = -\frac{4}{12}$. این غیر ممکن است. لذا این معادله در مجموعه اعداد حقیقی

جواب ندارد و تعیین علامت آن طبق حالت "ج" به صورت جدول زیر است:

x	$-\infty$	$+\infty$
$۱۲x^2 - 4$	+	+

با توجه به جدول تغییرات، علامت عبارت همواره مثبت است.

مثال ۴۶: عبارت جبری $-2x^2 + 4x - 6$ را تعیین علامت کنید.

حل: قرار می‌دهیم $-2x^2 + 4x - 6 = 0$ و ریشه‌های معادله را از روش Δ به

دست می‌آوریم.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-2)(-6) = -32 < 0.$$

$\Delta < 0$ ؛ معادله ریشه ندارد و علامت آن طبق حالت "ج" همان علامت a است.

x	$-\infty$	$+\infty$
$-2x^2 + 4x - 6$	-	-

همان‌طور که جدول نشان می‌دهد، علامت عبارت همواره منفی است.

مثال ۴۷: عبارت جبری $p = (-x^2 + 2x)(-2x + 2)$ را تعیین علامت کنید.

حل: هر یک از دو جمله‌ای‌های $(-x^2 + 2x)$ و $(-2x + 2)$ را در یک جدول

تعیین علامت کرده و از ضرب علامت‌های دو عبارت در هر فاصله علامت p را تعیین

می‌کنیم. بنابراین عبارت $-x^2 + 2x$ را مساوی صفر قرار داده و از عامل مشترک

فاکتور می‌گیریم $x(-x + 2) = 0$. لذا جواب‌های معادله $x = 2$ یا $x = 0$ خواهد بود.

همچنین اگر $-2x + 2 = 0$ ، آن گاه $x = 1$ و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۰	۱	۲	$+\infty$		
$-۲x+۲$	+		+	-		-	
$-x^۲+۲x$	-	۰	+		+	۰	-
p	-	۰	+	۰	-	۰	+

با توجه به جدول فوق، علامت عبارت روی فاصله $(-\infty, 0)$ و $(1, 2)$ منفی و روی فاصله $(0, 1)$ و $(2, +\infty)$ مثبت است.

مثال ۴۸: عبارت جبری $p = \frac{3x^2 - 6x}{6x - 6}$ را تعیین علامت کنید.

حل: علامت دو جمله‌ای واقع در صورت و مخرج را در یک جدول تعیین کرده، سپس از ضرب علامت‌های دو عبارت در هر فاصله، علامت p را تعیین می‌کنیم. لذا داریم $3x(x - 2) = 0$. بنابراین جواب‌های معادله $x = 0$ یا $x = 2$ خواهد بود. همچنین اگر $6x - 6 = 0$ ، آن گاه $6x = 6$ ، لذا $x = 1$. جدول تعیین علامت p به صورت زیر است:

x	$-\infty$	۰	۱	۲	$+\infty$		
$۳x^۲-۶x$	+	۰	-		-	۰	+
$۶x-۶$	-		-	۰	+		+
p	-	۰	+	∞	-	۰	+

همان‌طور که جدول نشان می‌دهد، علامت عبارت روی فاصله $(-\infty, 0)$ و $(1, 2)$ منفی و روی فاصله $(0, 1)$ و $(2, +\infty)$ مثبت است.

مثال ۴۹: عبارت $p = \frac{3x^2 + 10x + 3}{6x + 10}$ را تعیین علامت کنید.

حل: علامت دو جمله‌ای واقع در صورت و مخرج را در یک جدول تعیین کرده، سپس از ضرب علامت‌های دو عبارت در هر فاصله، علامت p را تعیین می‌کنیم. اگر $3x^2 + 10x + 3 = 0$ ، آن‌گاه $(x+3)(3x+1) = 0$. در نتیجه جواب‌های معادله $x = -3$ یا $x = -\frac{1}{3}$ خواهد بود. همچنین اگر $6x + 10 = 0$ ، آن‌گاه $6x = -10$.

لذا داریم $x = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$		
$3x^2+10x+3$	+	•	-		-	•	+
$6x+10$	-		-	•	+		+
p	-	•	+	∞	-	•	+

با توجه به جدول فوق، علامت عبارت روی فاصله $(-\infty, -3)$ و $(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3})$

منفی و روی فاصله $(-3, -\frac{5}{3})$ و $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ مثبت است.

مثال ۵۰: عبارت $p = \frac{3 + 3x^2}{3 - 3x^2}$ را تعیین علامت کنید.

حل: علامت دو جمله‌ای واقع در صورت و مخرج را در یک جدول تعیین کرده و سپس از ضرب علامت‌های دو عبارت در هر فاصله، علامت p را تعیین می‌کنیم. اگر

$3 + 3x^2 = 0$ ، آن گاه $3x^2 = -3$. لذا نتیجه می گیریم $x^2 = -1$ و این غیر ممکن است. همچنین اگر $3 - 3x^2 = 0$ ، آن گاه $3x^2 = 3$. لذا نتیجه می گیریم $x = \pm 1$ و جدول تعیین علامت آن به صورت زیر است:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$3 + 3x^2$	+			+
$3 - 3x^2$	-	•	•	-
p	-	∞	∞	-

همان طور که جدول نشان می دهد، علامت عبارت روی فاصله $(-\infty, -1)$ و $(1, +\infty)$ منفی و روی فاصله $(-1, 1)$ مثبت است.

تمرین

عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $9x^2 - 6x + 1$

۲) $-x^2 + 2x + 1$

۳) $-x^2 + 2x - 7$

۴) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$

۵) $(x-2)^2(1-x)^2$

۶) $-2(x+1)^2 - 1$

۷) $\frac{-4x}{x^2 - 9x}$

۸) $\frac{-x^2 - 1}{3x + 3}$

۹) $\frac{x^2 - 5x + 6}{-3x^2 + 4x - 1}$

۱۰) $\frac{2x^2 - 5x + 2}{-2x^2 + x + 1}$

۱۱) $\frac{2x^2 + 12}{x^2 + 1}$

۱۲) $\frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 + x + 1}$

۴-۱۰ روش حل نامعادله غیر درجه اول

برای حل یک نامعادله، در حالت کلی ابتدا آن را به یکی از صورت‌های زیر در می‌آوریم:

$$p \geq 0, p \leq 0, p < 0, p > 0$$

سپس با توجه به علامت p مجموعه جواب نامعادله مشخص می‌گردد.

مثال ۵۱: نامعادله $-x^2 + 2x - 9 \geq 0$ را حل کنید.

حل: همه جملات را به یک طرف نامساوی می‌بریم. داریم:

$$-x^2 + 2x - 9 \geq 0$$

قرار می‌دهیم: $p = -x^2 + 2x - 9$ و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$-x^2 + 2x - 9 = 0$$

معادله فوق یک معادله درجه دوم با $a = -1, b = 2, c = -9$ است. پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(-9) = -32 < 0$$

$\Delta < 0$ ؛ لذا معادله ریشه حقیقی ندارد و علامت آن همان علامت a است.

x	$-\infty$	$+\infty$
$-x^2 + 2x - 9$	-	-
$p \geq 0$	غیر قابل قبول	

همان‌طور که جدول نشان می‌دهد، عبارت فوق به ازای جميع مقادیر x که $x \in \mathbb{R}$ منفی است. لذا این عبارت به ازای هیچ مقداری از x مثبت نخواهد شد و جواب نامعادله مجموعه تهی است.

مثال ۵۲: نامعادله $-3x^2 + \sqrt{12}x - 1 \leq 0$ را حل کنید.

حل: قرار می‌دهیم: $p = -3x^2 + \sqrt{12}x - 1$ و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$-3x^2 + \sqrt{12}x - 1 = 0$$

معادله فوق یک معادله درجه دوم کامل با $a = -3$ ، $b = \sqrt{12}$ و $c = -1$

می‌باشد. داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{12})^2 - 4(-3)(-1) = 12 - 12 = 0$$

در نتیجه معادله دارای ریشه مضاعف به صورت زیر می‌باشد:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\sqrt{12} \pm \sqrt{0}}{2(-3)} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$-3x^2 + \sqrt{12}x - 1$	-	۰	-
$p \leq 0$	جواب		جواب

طبق جدول، عبارت فوق به ازای جميع مقادیر x که $x \in \mathbb{R}$ منفی و به ازای

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ صفر است. در نتیجه جواب نامعادله مجموعه اعداد حقیقی است.

مثال ۵۳: نامعادله $\frac{2x^2 - 5x + 2}{-2x^2 + x + 1} > 0$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را با

نماد بازه نمایش دهید.

حل: قرار می‌دهیم: $p = \frac{2x^2 - 5x + 2}{-2x^2 + x + 1}$ ، صورت و مخرج را تعیین علامت

می‌کنیم.

معادله $2x^2 - 5x + 2 = 0$ یک معادله درجه دوم کامل با $a = 2$ ، $b = -5$ و $c = 2$ می‌باشد. داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5 + 3}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

معادله $-2x^2 + x + 1 = 0$ یک معادله درجه دوم کامل با $a = -2$ ، $b = 1$ و $c = 1$ می‌باشد. داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(-2)(1) = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 3}{-4} = \frac{1}{4} \text{ و } \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۲	$+\infty$		
$۲x^۲ - ۵x + ۲$	+		+	•	-	•	+
$-۲x^۲ + x + ۱$	-	•	-		-		-
p	-	∞	-	•	+	•	-
$p > ۰$	غیر قابل قبول غیر قابل قبول جواب غیر قابل قبول						

با توجه به جدول تغییرات، علامت تابع روی فاصله $(\frac{1}{4}, 2)$ مثبت و روی فاصله

$(-\infty, \frac{1}{4})$ ، $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ و $(2, +\infty)$ منفی می‌باشد. در نتیجه جواب نامعادله $(\frac{1}{4}, 2)$ است.

مثال ۵۴: نامعادله $\frac{1}{x} < \frac{1}{x+2}$ را حل کنید.

حل: همه جملات را به یک طرف نامساوی می‌بریم. داریم:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} < 0.$$

قرار می‌دهیم:

$$p = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x}{x(x+2)} = \frac{2}{x(x+2)}$$

صورت کسر همواره مثبت است. برای تعیین علامت عبارت جبری p ، کافی است علامت مخرج را مشخص نماییم. از این رو مخرج را مساوی صفر قرار داده، لذا داریم $x(x+2)=0$. بنابراین جواب‌های معادله $x=0$ یا $x=-2$ خواهد بود و تعیین علامت آن به صورت جدول زیر است:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
$x(x+2)$	+		-		+	
p	+	∞	-	∞	+	
$p < 0$	غیر قابل قبول			جواب		غیر قابل قبول

با توجه به جدول تغییرات، علامت عبارت $p = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$ روی فاصله $(-2, 0)$ منفی و روی فاصله $(-\infty, -2)$ و $(0, +\infty)$ مثبت می‌باشد. بنابراین جواب نامعادله فاصله $(0, -2)$ است.

تمرین

جواب نامعادله‌های زیر را حل کرده و جواب آن را با نماد بازه نمایش دهید.

۱) $4x^2 \leq 10x - 4$

۲) $2x^2 - 3x \geq 2$

۳) $(x-1)^2 - (x-3)^2 > 5$

۴) $2x^2 - 2\sqrt{3}x < x^2 - 3$

۵) $\frac{2}{x-1} \leq \frac{1}{x}$

۶) $\frac{x-2}{x-4} \geq \frac{x+1}{x+3}$

۷) $\frac{x-5}{4} - \frac{x+8}{3} \geq \frac{x+11}{6}$

۸) $\frac{1-x}{2+x} \geq \frac{3-x}{1+x}$

۹) $\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 15x + 56} < 0$

۱۰) $\frac{x-4}{x^2 + 2x} \leq 0$

۱۱) $\frac{5x^2 + 20x + 6}{-3x^2 + 2x - 1} - 1 > 0$

۱۲) $1 + \frac{2}{2x^2 + x - 1} > 0$

۴-۱۱ قدرمطلق

۴-۱۱-۱ تعریف: اگر x یک عدد حقیقی باشد، قدرمطلق x را با نماد $|x|$ نشان داده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

الف: هرگاه x مثبت باشد: $|x| = x$.

ب: هرگاه x منفی باشد: $|x| = -x$.

ج: هرگاه x صفر باشد: $|x| = 0$.

مثال ۵۵: حاصل عبارات زیر براساس تعریف قدرمطلق مشخص شده است.

۱) $|7| = 7$

۲) $|-4| = 4$

۳) $|0| = 0$

مثال ۵۶: عبارت $|\sqrt{5} - 2|$ را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

حل: حاصل عبارت داخل قدرمطلق مقداری مثبت است؛ بنابراین بنا به تعریف

قدرمطلق داریم:

$$|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$$

مثال ۵۷: عبارت $|4 - \sqrt{26}|$ را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

حل: حاصل عبارت داخل قدرمطلق مقداری منفی است؛ لذا بنا به تعریف قدرمطلق

داریم:

$$|4 - \sqrt{26}| = -(4 - \sqrt{26}) = -4 + \sqrt{26}$$

مثال ۵۸: عبارت $|\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + \pi|$ را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

حل: حاصل عبارت داخل قدرمطلق مقداری مثبت است؛ بنابراین بنا به تعریف

قدرمطلق داریم:

$$|\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + \pi| = \sqrt{3} - 2\sqrt{5} + \pi$$

مثال ۵۹: هرگاه x یک عدد حقیقی باشد به طوری که $1 < x < 4$ ، عبارت زیر را

بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

$$A = |x - 1| + 2|x - 4| - 3|x|$$

حل: اگر $1 < x < 4$ ، آن گاه $0 < x - 1$ ، بنابراین طبق تعریف قدرمطلق داریم:

$$|x - 1| = x - 1$$

اگر $1 < x < 4$ ، آن گاه $x - 4 < 0$ ، در نتیجه طبق تعریف قدرمطلق داریم:

$$|x - 4| = -(x - 4) = -x + 4$$

همچنین اگر $1 < x < 4$ ، آن گاه $x - 4 < 0$ ، لذا طبق تعریف قدرمطلق داریم:

$$|x| = x$$

بنابراین داریم:

$$A = x - 1 + 2(-x + 4) - 3x = -4x + 7$$

مثال ۶۰: عبارت $|2x - 6|$ را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

حل: با توجه به تعریف قدرمطلق داریم:

$$|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & 2x - 6 \geq 0 \\ -(2x - 6) & 2x - 6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 6 & x \geq 3 \\ -2x + 6 & x < 3 \end{cases}$$

مثال ۶۱: عبارت $|4x + 2|$ را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

حل: با توجه به تعریف قدرمطلق داریم:

$$\begin{aligned} |4x + 2| &= \begin{cases} 4x + 2 & 4x + 2 \geq 0 \\ -(4x + 2) & 4x + 2 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4x + 2 & x \geq -\frac{1}{2} \\ -4x - 2 & x < -\frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4x + 2 & x \geq -\frac{1}{2} \\ -4x - 2 & x < -\frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4x + 2 & x \geq -\frac{1}{2} \\ -4x - 2 & x < -\frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4x + 2 & x \geq -\frac{1}{2} \\ -4x - 2 & x < -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

۱۲-۴ خواص قدرمطلق

(۱) اگر x یک عدد حقیقی دلخواه باشد، آن‌گاه:

$$|x| \geq 0$$

(۲) هرگاه x یک عدد حقیقی و n یک عدد زوج باشد، داریم:

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|$$

(۳) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

$$|xy| = |x| |y|$$

(۴) برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$|x^2| = |x|^2 = x^2$$

(۵) برای هر دو عدد حقیقی x و y با شرط $y \neq 0$ داریم:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

(۶) برای هر دو عدد حقیقی x و y رابطه زیر که نامساوی مثلث نامیده می‌شود داریم:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

(۷) برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

(۸) هرگاه a و x عدد حقیقی مثبت باشند، از $|x| < a$ نتیجه می‌گیریم که $-a < x < a$.

(۹) هرگاه x یک عدد حقیقی دلخواه و a عدد حقیقی مثبت باشد، از $|x| > a$ نتیجه می‌گیریم که $x > a$ یا $x < -a$.

(۱۰) هرگاه x یک عدد حقیقی دلخواه و a عدد حقیقی مثبت باشد، از $|x| = a$ نتیجه می‌گیریم که $x = \pm a$.

(۱۱) به ازای هر دو عدد حقیقی x و y ؛ اگر $|x| = |y|$ ، آن‌گاه $x = \pm y$.

(۱۲) برای هر عدد حقیقی x داریم $|x| = |-x|$.

مثال ۶۲: با توجه به خاصیت دوم قدرمطلق عبارات زیر بدون رادیکال نوشته شده‌اند.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2} &= |x| \\ \sqrt{x^2 - 6x + 9} &= \sqrt{(x-3)^2} = |x-3| \\ \sqrt[4]{(x^2 - 8x)^4} + \sqrt[5]{x^5} &= |x^2 - 8x| + x\end{aligned}$$

۱۳-۴ حل معادلات و نامعادلات شامل قدر مطلق

در مثال‌های زیر به کمک خواص قدرمطلق، با حل معادلات و نامعادلات ساده شامل قدرمطلق آشنا می‌شویم.

مثال ۶۳: معادله $|3x + 5| = -4$ را حل کنید.

حل: این معادله بنا به خاصیت ۱ قدرمطلق جواب ندارد.

مثال ۶۴: نامعادله $|3x - 1| < 0$ را حل کنید.

حل: این نامعادله بنا به خاصیت ۱ قدرمطلق، جواب ندارد.

مثال ۶۵: معادله $|x - 3| = 7$ را حل کنید.

حل: بنا به خاصیت ۱۰ قدرمطلق از تساوی $|x - 3| = 7$ نتیجه می‌گیریم که $x - 3 = \pm 7$ ، لذا جواب‌های معادله $x = 10$ و $x = -4$ خواهد بود.

مثال ۶۶: معادله $\left| \frac{4x - 8}{5} \right| = 0$ را حل کنید.

حل: بنا به تعریف قدرمطلق از تساوی $\left| \frac{4x - 8}{5} \right| = 0$ نتیجه می‌گیریم $\frac{4x - 8}{5} = 0$

لذا $4x - 8 = 0$ و جواب معادله $x = 2$ خواهد بود.

مثال ۶۷: نامعادله $|x + 4| < 3$ را حل کنید.

حل: بنا به خاصیت ۸ قدرمطلق از نامساوی $|x + 4| < 3$ نتیجه می‌گیریم که
 $-3 < x + 4 < 3$ ، لذا داریم: $-7 < x < -1$.

مثال ۶۸: معادله $|7x - 2| = |8 - x|$ را حل کنید.

حل: بنا به خاصیت ۱۱ قدرمطلق از تساوی $|7x - 2| = |8 - x|$ نتیجه می‌گیریم
 که $7x - 2 = 8 - x$ یا $7x - 2 = -(8 - x)$ ، لذا داریم: $8x = 10$ یا $6x = -6$
 جواب‌های معادله $x = \frac{10}{8}$ و $x = \frac{-6}{6} = -1$ خواهد بود.

مثال ۶۹: نامعادله $|10x - 1| \geq 12$ را حل کنید.

حل: بنا به خاصیت ۹ قدرمطلق از نامساوی $|10x - 1| \geq 12$ نتیجه می‌گیریم که
 $10x - 1 \geq 12$ یا $10x - 1 \leq -12$ ، لذا جواب‌های معادله $x \geq \frac{13}{10}$ و $x \leq -\frac{11}{10}$
 خواهد بود.

مثال ۷۰: نامعادله $(2x + 4)^2 < 36$ را حل کنید.

حل: با توجه به این که طرفین نامعادله مقداری مثبت هستند می‌توان از طرفین
 نامعادله جذر گرفت و آن را حل کرد.

$$\begin{aligned} \sqrt{(2x + 4)^2} &< \sqrt{36} \\ |2x + 4| &< 6 \\ -6 &< 2x + 4 < 6 \\ -6 - 4 &< 2x < 6 - 4 \\ -10 &< 2x < 2 \\ -5 &< x < 1 \end{aligned}$$

مثال ۷۱: نامعادله $|5x - 2| > 0$ را حل کنید.

حل: با توجه به خاصیت ۱ قدرمطلق، از نامساوی $|5X - 2| > 0$ نتیجه می‌گیریم که $|5X - 2| \neq 0$ ، لذا داریم: $5X - 2 \neq 0$ و جواب معادله همه اعداد حقیقی به غیر از $X = \frac{2}{5}$ خواهد بود.

مثال ۷۲: نامعادله $|7X - 2| \leq 0$ را حل کنید.

حل: بنا به خاصیت ۱ قدرمطلق از نامساوی $|7X - 2| \leq 0$ نتیجه می‌گیریم که $7X - 2 = 0$ ، لذا داریم: $7X = 2$ و جواب معادله $X = \frac{2}{7}$ خواهد بود.

مثال ۷۳: نامعادله $2 < \frac{2X}{X-1} < 2$ را حل کنید.

حل: بنا به خاصیت ۸ قدرمطلق، از نامساوی $2 < \frac{2X}{X-1} < 2$ نتیجه می‌گیریم که $2 < \left| \frac{2X}{X-1} \right|$ و بنا به خاصیت پنج $\frac{|2X|}{|X-1|} < 2$. از این رو داریم $|2X| < 2|X-1|$. با توجه به خاصیت ۱ قدرمطلق، $|X-1|$ و $|2X|$ نامنفی هستند؛ لذا می‌توان طرفین نامعادله را به توان دو رساند و آن را حل کرد.

$$|2X|^2 < (2|X-1|)^2$$

$$4X^2 < 4(X-1)^2$$

$$4X^2 < 4X^2 - 8X + 4$$

$$8X < 4$$

$$X < \frac{4}{8}$$

مجموعه جواب نامعادله با توجه به این شرط که $X \neq 1$ ، (عدد ۱ مخرج کسر

نامعادله را صفر کرده و قابل قبول نیست) برابر با $(-\infty, \frac{1}{4})$ است.

مثال ۷۳: نامعادله $|x-2| < |x|$ را حل کنید.

حل: با توجه به خاصیت ۱ قدرمطلق، $|x-2|$ و $|x|$ نامنفی هستند. با استفاده از این خاصیت نامساوی‌ها که اگر $0 < a < b$ ، آن گاه: $a^2 < b^2$ ، می‌توان طرفین نامعادله را به توان دو رساند و نامعادله را حل کرد.

$$\begin{aligned} |x-2|^2 &< |x|^2 \\ (x-2)^2 &< (x)^2 \\ x^2 - 2x + 4 &< x^2 \\ -2x + 4 &< 0 \\ -2x &< -4 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

تمرین

حاصل عبارات زیر را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

$$\begin{array}{ll} ۱) |\sqrt[3]{4} - \sqrt{6}| & ۲) |\sqrt{5} - \sqrt{2}| \\ ۳) |\sqrt{8} + \sqrt[3]{3} - 9| & ۴) |\sqrt{7} - 4\sqrt[5]{3} + 2| \\ ۵) |\sqrt{3} - \sqrt{2}| - |\sqrt{2} - \sqrt{3}| & ۶) |\sqrt{7} - 2| - 3|\sqrt{6} + \sqrt{5}| \end{array}$$

با توجه به شرایط داده شده، حاصل عبارات زیر را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

$$\begin{array}{ll} ۷) A = |x-2| + 3|x| & x < -1 \\ ۸) B = |x-4| + |x-6| & 4 < x < 6 \\ ۹) C = -2|5-x| + |2x-10| & x < 5 \\ ۱۰) D = 2|x+1| + |x-2| & -3 < x < -1 \end{array}$$

هر یک از عبارات زیر را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

$$۱۱) ۴ + ۳|x - ۷|$$

$$۱۲) |۳x - ۸|$$

$$۱۳) |x^۳ + x|$$

$$۱۴) ۲x + x|x + ۱|$$

$$۱۵) ۲|x + ۱| + ۳|x - ۲|$$

$$۱۶) |۴ - x^۲|$$

به کمک خواص قدرمطلق، معادلات زیر را حل کنید.

$$۱۷) -۲|x + ۱| = -۸$$

$$۱۸) |۴x - ۸| = ۹$$

$$۱۹) |۳x - ۴| = ۲ + ۵x$$

$$۲۰) |x - ۲| = -|۲ - x|$$

$$۲۱) \left| \frac{x-۱}{x+۳} \right| = ۲$$

$$۲۲) x^۲ + ۳|x| = ۴$$

به کمک خواص قدرمطلق، نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۲۳) |۱۲x - ۴| \geq ۳$$

$$۲۴) |۲x + ۸| < -۲$$

$$۲۵) |۵x - ۲| < ۰$$

$$۲۶) (۲x - ۱)^۲ \leq ۹$$

$$۲۷) |۸x + ۹| < ۰$$

$$۲۸) |۳x - ۶| \geq ۰$$

$$۲۹) |x - ۷| \geq |۲x + ۴|$$

$$۳۰) |x - ۱| < |۲x + ۱|$$

$$۳۱) \frac{-۱}{|x+۲|} < \frac{-۲}{|x+۳|}$$

$$۳۲) -۱ < \frac{۲x}{x-۲} < ۱$$

در صورت وجود دو عدد مانند a و b مثال بزنید به طوری که روابط زیر برقرار باشند.

$$۳۳) |a - b| = |a| - |b|$$

$$۳۴) |a + b| = |a| + |b|$$

$$۳۵) |a + b| < |a| + |b|$$

$$۳۶) |a + b| > |a| + |b|$$

۴-۱۴ معادلات گنگ

۴-۱۴-۱ تعریف: معادله‌ای را که شامل عبارتی از مجهول در زیر رادیکال باشد، یک معادله گنگ یا اصم می‌نامیم.

۴-۱۵ روش حل معادلات گنگ

برای حل یک معادله گنگ با جابه‌جایی‌های مناسب در دو طرف معادله، طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم تا معادله به شکل یک چند جمله‌ای در بیاید. پس از حل این معادله جدید، جواب‌ها را در معادله اصلی قرار می‌دهیم. جواب‌هایی که در معادله اصلی صدق کنند قابل قبول خواهند بود.

مثال ۷۵: معادله $\sqrt{x+2} = x$ را حل کنید.

حل: طرفین معادله را به توان دو رسانده، نتیجه می‌گیریم که $x+2 = x^2$ بنابراین $x^2 - x - 2 = 0$ ، برای به دست آوردن جواب معادله آن را تجزیه می‌کنیم داریم $(x+1)(x-2) = 0$ ، لذا جواب‌های معادله $x = -1$ یا $x = 2$ خواهد بود. از دو جواب اخیر فقط $x = 2$ در معادله اصلی صدق می‌کند و قابل قبول است.

مثال ۷۶: معادله $\sqrt{x^2 - 10x} = \sqrt{3x - 12}$ را حل کنید.

حل: طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم، لذا داریم $x^2 - 10x = 3x - 12$ بنابراین $x^2 - 13x + 12 = 0$ ، برای به دست آوردن جواب معادله آن را تجزیه می‌کنیم داریم $(x-12)(x-1) = 0$ ، لذا جواب‌های معادله $x = 12$ یا $x = 1$ خواهد بود. از دو جواب اخیر فقط $x = 12$ در معادله اصلی صدق می‌کند و قابل قبول است.

مثال ۷۷: معادله $\sqrt{x^2 - 3x + 5} - 2 = x$ را حل کنید.

حل: ابتدا ۲- را به طرف دوم معادله منتقل می‌کنیم. لذا نتیجه می‌گیریم که
 $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = x + 2$. سپس طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم. داریم:
 $x^2 - 3x + 5 = (x + 2)^2$. لذا $x^2 - 3x + 5 = x^2 + 4x + 4$. برای به دست
 آوردن جواب معادله آن را ساده می‌کنیم. $-3x - 4x = 4 - 5$ ، لذا $-7x = -1$.
 جواب معادله $x = \frac{1}{7}$ است و قابل قبول خواهد بود؛ زیرا در معادله اصلی صدق
 می‌کند.

مثال ۷۸: معادله $\sqrt[3]{x-1} = x-1$ را حل کنید.

حل: طرفین معادله را به توان سه می‌رسانیم. داریم: $(\sqrt[3]{x-1})^3 = (x-1)^3$.
 بنابراین $x-1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ و با ساده کردن آن نتیجه می‌گیریم که
 $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ از x فاکتور گرفته $x(x^2 - 3x + 2) = 0$ و تجزیه می‌کنیم
 داریم $x(x-2)(x-1) = 0$. لذا جواب‌های معادله $x=1$ ، $x=2$ یا $x=0$ خواهد بود.
 هر سه جواب فوق قابل قبول است؛ زیرا در معادله اصلی صدق می‌کنند.

تمرین

معادلات گنگ زیر را حل کنید.

$$۱) \sqrt{x^2 - 3x + 2} = x$$

$$۲) \sqrt{4+x} = x-2$$

$$۳) \sqrt{4x^2 + 4x - 3} = 2x + 5$$

$$۴) \sqrt[3]{x^3 + x} = x + 2$$

$$۵) \sqrt[3]{x^3 - x} = x + 1$$

$$۶) \sqrt{4-x^2} = \frac{1}{3}(6-x)$$

$$۷) \sqrt{3+x} + \sqrt{x} = 3$$

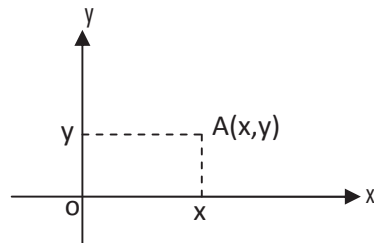
$$۸) x + \sqrt{x-4} = 4$$

فصل پنجم: هندسه تحلیلی

رنه دکارت ریاضیدان فرانسوی، مبدع هندسه تحلیلی در سال ۱۶۳۷ می‌باشد. رساله کوچک او به نام هندسه، نخستین اثر مکتوب در هندسه تحلیلی می‌باشد. در این فصل تعاریف و فرمول‌های هندسه تحلیلی در فضای دو بعدی یعنی صفحه را به همراه کاربردهایی از آن را بیان می‌کنیم.

۵-۱ دستگاه مختصات دکارتی

۵-۱-۱ تعریف: دستگاه مختصات دکارتی از دو محور عمود بر هم تشکیل شده، محور افقی را محور طول‌ها یا x ها و محور قائم را محور عرض‌ها یا y ها می‌نامیم.

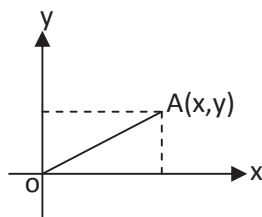


در این دستگاه هر نقطه A در صفحه را با زوج مرتب (x, y) نمایش می‌دهیم که در آن x فاصله نقطه A تا محور y ها و y فاصله نقطه A تا محور x ها است. مجموعه دوتایی (x, y) را با $\mathbb{R}^2$ نمایش داده و آن را صفحه می‌نامیم. لذا داریم:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

هر نقطه روی محور x ها به صورت $(x, 0)$ و روی محور y ها به صورت $(0, y)$ است.

۵-۱-۲ تعریف: فاصله نقطه $A(x, y)$ از مبدأ با نماد $|OA|$ نمایش داده شده و توسط فرمول $|OA| = \sqrt{x^2 + y^2}$ محاسبه می‌شود.



مثال ۱: فاصله نقطه $A(-2, 5)$ را از مبدأ به دست آورید.

حل: با توجه به تعریف ۵-۱-۲ داریم:

$$|OA| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

۵-۱-۳ تعریف: فاصله بین دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ با نماد $|AB|$

نمایش داده شده و مقدار آن بنابر رابطه فیثاغورث برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال ۲: فاصله دو نقطه $A(3, -2)$ و $B(3, 2)$ را محاسبه کنید.

حل: با توجه به تعریف ۵-۱-۳ داریم:

$$|AB| = \sqrt{(3 - 3)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{16} = 4$$

مثال ۳: نشان دهید نقاط $A(-2, 1)$ ، $B(4, 1)$ و $C(1, 5)$ رأس‌های یک مثلث

متساوی‌الساقین می‌باشند.

حل: اندازه سه ضلع AB و AC و BC را به دست می‌آوریم.

$$|AB| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$|AC| = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|BC| = \sqrt{(1 - 4)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

دو ضلع AC و BC با هم مساوی‌اند، پس نوع مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد.

مثال ۴: محیط مثلثی را بیابید که نقاط $A(\sqrt{5}, -2)$ ، $B(0, 0)$ و $C(0, 3)$ رأس‌های آن باشند.

حل: ابتدا اندازه سه ضلع AB، AC و BC را به دست می‌آوریم.

$$|AB| = \sqrt{(0 - \sqrt{5})^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|AC| = \sqrt{(0 - \sqrt{5})^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{5 + 25} = \sqrt{30}$$

$$|BC| = \sqrt{(0 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{9} = 3$$

چون محیط مثلث برابر با مجموع سه ضلع AB و AC و BC است. لذا داریم:

$$\text{محیط} = 3 + 3 + \sqrt{30} = 6 + \sqrt{30}$$

مثال ۵: طول قطر مربعی را پیدا کنید که مختصات دو سر آن $A(4, -1)$ و $C(2, 1)$ باشد.

حل: طول پاره‌خط AC مورد نظر است. بنا به تعریف ۵-۱-۳ داریم:

$$|AC| = \sqrt{(2 - 4)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{8}$$

۵-۱-۱ نکته: فاصله نقطه A تا B برابر با فاصله نقطه B تا A است؛ یعنی:

$$|AB| = |BA|$$

۵-۱-۲ نکته: فاصله هر نقطه از خود آن نقطه برابر صفر است؛ به عبارت دیگر:

$$|AA| = 0$$

۴-۱-۵ تعریف: اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه در صفحه باشند و M نقطه وسط پاره خط AB باشد، آن‌گاه مختصات نقطه M وسط پاره خط AB از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

مثال ۶: اگر $A(-2, 3)$ و $B(1, -5)$ دو نقطه در صفحه باشند، مختصات نقطه M وسط پاره خط AB را به دست آورید.

حل: با توجه به تعریف ۴-۱-۵ داریم:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3 + (-5)}{2} = -1$$

لذا مختصات نقطه M برابر است با $(-\frac{1}{2}, -1)$.

تمرین

در هریک از تمرین‌های زیر فاصله نقاط داده شده را بیابید.

$$۱) A(2, 3), \quad B(3, -5) \qquad ۲) A(1, 2), \quad B(-3, 4)$$

$$۳) A(0, 2), \quad B(1, -3) \qquad ۴) A(0, 0), \quad B(1, -2)$$

۵) مختصات نقطه M وسط پاره خط AB که در آن $A(-2, 3)$ و $B(4, -5)$ می‌باشد را پیدا کنید.

۶) اگر $A(4, -1)$ و $C(2, 1)$ دو سر قطر یک مربع باشند، محیط و مساحت این مربع را به دست آورید.

۷) فاصله نقطه $M(-1, 6)$ ، از وسط پاره خط AB که در آن $A(-2, -2)$ و $B(2, 4)$ است را به دست آورید.

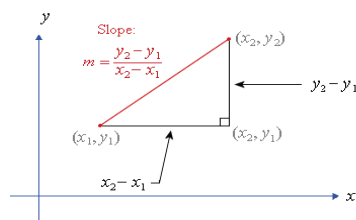
۸) اگر $A(1, 3)$ و نقطه B واقع بر محور x ها و طول پاره خط AB برابر با ۳ باشد، مختصات نقطه B را به دست آورید.

۵-۲ شیب خط

۵-۲-۱ تعریف: نسبت تغییرات عرض‌های دو نقطه دلخواه از یک خط به تغییرات طول‌های متناظر آن‌ها را شیب آن خط می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه از یک خط باشند، آنگاه شیب یا ضریب زاویه خط را با m نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

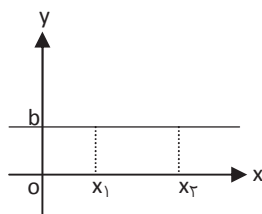
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

شیب خط مقدار ثابتی است و به انتخاب نقاط بستگی ندارد.



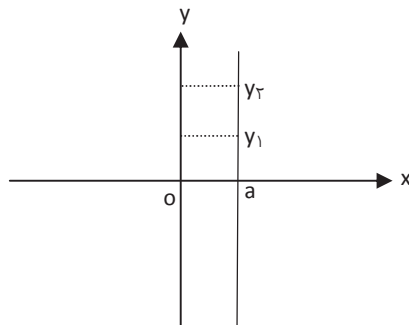
۵-۲-۱ نکته: شیب هر خط موازی محور x ها برابر صفر است. زیرا عرض تمام نقاط روی این خط یکسان است.

$$m = \frac{b - b}{x_2 - x_1} = 0$$



۵-۲-۲ نکته: شیب هر خط موازی محور y ها تعریف نشده است. زیرا طول تمام نقاط روی این خط یکسان است.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{a - a} = \frac{y_2 - y_1}{0} \text{ (تعریف نشده)}$$



۵-۲-۳ نکته: فرض کنیم معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ باشد که در آن $(a \neq 0, b \neq 0)$ ، در این صورت داریم:

$$by = -ax - c$$

با تقسیم طرفین رابطه بر b داریم:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

ضریب x همان شیب خط است. بنابراین:

$$m = -\frac{a}{b}$$

مثال ۷: شیب خط $2x - 3y + 5 = 0$ را به دست آورید.

حل: با توجه به نکته ۵-۲-۳، $(a = 2, b = -3)$ داریم:

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

۵-۳ معادله خط

خط مانند مجموعه از جمله مفاهیم تعریف نشده‌ی ریاضی است که به این صورت توصیف می‌شود: "مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی از صفحه که دارای شیب یکسانی هستند."

معادله خط را با دو نوع اطلاعات می‌توان نوشت:

الف) شیب و یک نقطه از خط: معادله خطی که از نقطه (x_1, y_1) می‌گذرد و شیب آن m است به صورت زیر می‌باشد:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال ۸: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-2, 3)$ می‌گذرد و شیب آن برابر ۴ می‌باشد.

حل: با توجه به فرض مسئله $x_1 = -2$ ، $y_1 = 3$ و مقدار $m = 4$ است. لذا کافی است مقادیر داده شده را در فرمول فوق جانشین کنیم.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 4(x - (-2))$$

$$y - 3 = 4x + 8$$

$$y = 4x + 11$$

ب) دو نقطه از خط: برای نوشتن معادله خطی که از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد، ابتدا شیب خط را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حال بنا بر آن چه قبلاً گفته شد معادله خط به صورت زیر خواهد بود:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

مثال ۹: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $(۱, ۴)$ و $(۵, ۲)$ می‌گذرد.

حل: ابتدا شیب خط را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 4}{5 - 1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

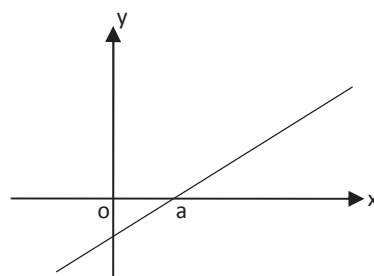
حال معادله خط به صورت زیر خواهد بود:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 4 = -\frac{1}{2} (x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

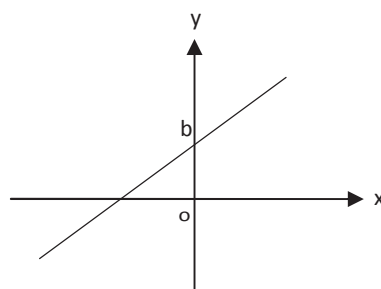
۵-۳-۱ تعریف: هر گاه خطی محور x ها را در نقطه $(a, 0)$ قطع کند، آن گاه a را



طول از مبدأ می‌نامیم.

۵-۳-۲ تعریف: هر گاه خطی محور y ها را در نقطه $(0, b)$ قطع کند، آن گاه b

را عرض از مبدأ خط می‌نامیم.



مثال ۱۰: معادله خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن ۲ و عرض از مبدأ آن ۳ باشد.

حل: طول از مبدأ این خط ۲ است، بنابراین این خط از نقطه $(۲,۰)$ می‌گذرد و چون عرض از مبدأ آن ۳ است، از نقطه $(۰,۳)$ نیز می‌گذرد. پس کافی است معادله خطی را بنویسیم که از این دو نقطه می‌گذرد.

ابتدا شیب خط را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{0 - 2} = -\frac{3}{2}$$

حال معادله خط به صورت زیر خواهد بود:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 0 = -\frac{3}{2} (x - 2)$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

مثال ۱۱: خط $y = x + a + 2$ مفروض است، مقدار a را به قسمی تعیین کنید که عرض از مبدأ این خط برابر ۴ باشد.

حل: چون عرض از مبدأ این خط برابر ۴ است، از نقطه $(۰,۴)$ می‌گذرد. لذا کافی است مختصات این نقطه را در معادله خط قرار دهیم.

$$4 = 0 + a + 2$$

لذا نتیجه می‌گیریم که $a = 2$.

مثال ۱۲: معادله خطی را بنویسید که خط $y + 2x = 3$ را در نقطه‌ای به طول یک و خط $3y - x = 2$ را در نقطه‌ای به عرض دو قطع کند.

حل: چون خط $y + 2x = 3$ را در نقطه‌ای به طول یک قطع می‌کند، بنابراین $x = 1$ در معادله خط صدق می‌کند. پس داریم:

$$y + 2(1) = 3$$

لذا نتیجه می‌گیریم $y = 1$ و مختصات نقطه‌ی تقاطع با خط $y + 2x = 3$ برابر با $(1, 1)$ می‌شود.

به همین ترتیب چون خط $3y - x = 2$ را در نقطه‌ای به عرض دو قطع می‌کند، بنابراین $y = 2$ در معادله خط صدق می‌کند. پس داریم:

$$3(2) - x = 2$$

پس نتیجه می‌گیریم $x = 4$ و مختصات نقطه‌ی تقاطع با خط $3y - x = 2$ برابر با $(4, 2)$ می‌شود.

حال برای نوشتن معادله‌ی مورد نظر کافی است معادله خطی را بنویسیم که از دو نقطه $(1, 1)$ و $(4, 2)$ می‌گذرد. ابتدا شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

حال معادله خط به صورت زیر خواهد بود:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

تمرین

(۱) شیب خط $4x - 2y + 1 = 0$ را به دست آورید.

(۲) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-2, 3)$ می‌گذرد و شیب آن برابر ۴ می‌باشد.

(۳) معادله خطی را بنویسید که طول از مبدأ آن ۴ و عرض از مبدأ آن ۲ باشد.

۴) معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $(2, -3)$ و $(4, -1)$ می‌گذرد.

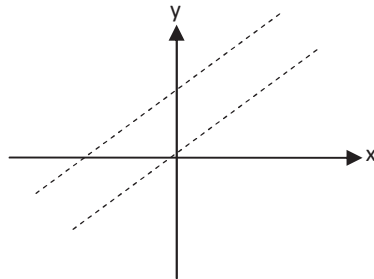
۵) خط $y = 2x + a + 1$ مفروض است، مقدار a را به قسمی تعیین کنید که طول از مبدأ این خط برابر ۲ باشد.

۶) معادله خطی را بنویسید که خط $3x - 4y + 1 = 0$ را در نقطه‌ای به طول یک و خط $x + y = 4$ را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند.

۴-۵ وضعیت دو خط نسبت به یکدیگر

دو خط نسبت به هم یا موازیند یا متقاطع می‌باشند.

۴-۵-۱ نکته: شرط لازم و کافی برای آن که دو خط متمایز با هم موازی باشند، آن است که شیب دو خط با هم برابر باشد.



مثال ۱۳: وضعیت خطوط $L: y = 3x - 5$ و $L': 2y - 6x - 7 = 0$ را نسبت به هم بررسی کنید.

حل: شیب خط L برابر با $m = 3$ و شیب خط L' برابر است با:

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{-6}{2} = 3$$

چون شیب دو خط با هم مساوی است، لذا دو خط L و L' با هم موازیند.

۵-۴-۲ نکته: شرط لازم و کافی برای آن که دو خط برهم عمود باشند، آن است که حاصل ضرب شیب دو خط برابر ۱- باشد.

مثال ۱۴: دو خط $L: ax + 4y = 2$ و $L': 3x - y = 5$ بر هم عمودند، مقدار a را پیدا کنید.

حل: شیب خط L برابر با $m = -\frac{a}{4}$ و شیب خط L' برابر است با:

$$m' = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-1} = 3$$

چون دو خط بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب دو خط باید برابر با ۱- باشد، لذا داریم:

$$m \times m' = -1 \Rightarrow -\frac{a}{4} \times 3 = -1 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

مثال ۱۵: وضعیت دو خط $L: y = \frac{3}{4}x - 1$ و $L': 4x + 6y = 1$ را نسبت به هم بررسی کنید.

حل: شیب خط L برابر با $m = \frac{3}{4}$ و شیب خط L' برابر است با:

$$m' = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

حاصل ضرب شیب دو خط برابر با ۱- است، لذا دو خط L و L' بر هم عمودند.

مثال ۱۶: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-3, 5)$ می‌گذرد و بر خط L به معادله $3x - 2y = 7$ عمود است.

حل: چون خط مطلوب بر خط L عمود است، پس حاصل ضرب شیب خط مورد نظر با شیب خط L باید برابر با ۱- باشد. شیب خط L برابر است با:

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$$

شیب خط مورد نظر را m' نامیده و داریم:

$$m \times m' = -1 \Rightarrow \frac{3}{2} \times m' = -1 \Rightarrow m' = -\frac{2}{3}$$

پس معادله خطی را می‌خواهیم که از نقطه $(-3, 5)$ می‌گذرد و شیب آن برابر $-\frac{2}{3}$ است. حال معادله خط به صورت زیر خواهد بود:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x - (-3))$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 7$$

مثال ۱۷: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(3, 4)$ می‌گذرد و با خط L به معادله $y - 2x = 1$ موازی است.

حل: چون خط مطلوب با خط L موازی است، پس شیب خط مورد نظر با شیب خط L برابر است.

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{-2}{1} = 2$$

پس معادله خطی را می‌خواهیم که از نقطه $(3, 4)$ می‌گذرد و شیب آن برابر ۲ است. حال معادله خط به صورت زیر خواهد بود:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 2(x - 3)$$

$$y - 4 = 2x - 6$$

$$y = 2x - 2$$

۵-۴-۳ نکته: هرگاه شیب دو خط با هم برابر نباشد، آن‌گاه دو خط متقاطع می‌باشند. برای به دست آوردن نقطه تقاطع کافی است معادله دو خط هم زمان در یک دستگاه مختصات قرار داده، جواب دستگاه نقطه تقاطع می‌باشد.

مثال ۱۸: وضعیت دو خط $L: y = \frac{2}{3}x - 1$ و $L': y = 2x - 5$ را نسبت به هم بررسی کنید.

حل: شیب خط L برابر با $m = \frac{2}{3}$ و شیب خط L' برابر است با $m' = 2$. چون شیب دو خط با هم مساوی نیست، لذا دو خط L و L' با هم موازی نمی‌باشند و متقاطعند. برای به دست آوردن نقطه تقاطع کافی است معادله دو خط را هم زمان در یک دستگاه قرار داده و جواب دستگاه را به دست آوریم.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 1 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

معادله اول را در ۳- ضرب کرده و با معادله دوم جمع می‌کنیم.

$$\begin{cases} -2x + 3y = -3 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

حاصل جمع دو معادله با هم برابر با $y = 1$ می‌شود. مقدار $y = 1$ را در معادله $2x - y = 5$ قرار داده، داریم $2x - 1 = 5$ ، لذا $x = 3$ و مختصات نقطه تقاطع برابر با $(3, 1)$ می‌شود.

مثال ۱۹: وضعیت دو خط $L: 2y + 3x = 6$ و $L': y = 2x - 4$ را نسبت به هم بررسی کنید.

حل: شیب خط L برابر با $m = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{2}$ و شیب خط L' برابر است با $m' = 2$. چون شیب دو خط با هم مساوی نیست، لذا دو خط L و L' با هم موازی

نمی‌باشند و متقاطعند. برای به دست آوردن نقطه تقاطع کافی است معادله دو خط را هم زمان در یک دستگاه قرار داده و جواب دستگاه را به دست آوریم.

$$\begin{cases} 2y + 3x = 6 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

معادله دوم را در ۲ ضرب کرده و با معادله اول جمع می‌کنیم.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$$

حاصل برابر با $x = 2$ می‌شود. مقدار $x = 2$ را در معادله $2y + 3x = 6$ قرار داده، داریم: $2y + 3(2) = 6$ و مقدار $y = 0$ نتیجه می‌شود. پس مختصات نقطه تقاطع برابر است با $(2, 0)$.

تمرین

(۱) وضعیت دو خط $L: 3x - 2y = 0$ و $L': 2x - 3y = 0$ را نسبت به هم بررسی کنید.

(۲) وضعیت دو خط $L: 2y - 5x = 1$ و $L': y - 4x = 8$ را نسبت به هم بررسی کنید.

(۳) وضعیت دو خط $L: y - x = 2$ و $L': 4y + 2x = 5$ را نسبت به هم بررسی کنید.

(۴) وضعیت دو خط $L: 3y + 4x = 1$ و $L': 2y + x = 1$ را نسبت به هم بررسی کنید.

(۵) دو خط $L: 4x + ay = 1$ و $L': y = \frac{1}{4}x$ بر هم عمودند، مقدار a را پیدا کنید.

(۶) دو خط $L: 2ax - 3y = x - m$ و $L': 2x - y = 1 - 3x$ عمودند، مقدار a را پیدا کنید.

(۷) معادله خطی را بنویسید که $A(2, 3)$ را به محل تلاقی دو خط به معادله‌های $y = 3x - 5$ و $2y - 6x - 7 = 0$ وصل کند.

(۸) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد و با خط L به معادله $y = 3x - 5$ موازی است.

(۹) معادله خطی را بنویسید که بر محور x ها عمود باشد و خط $x = 2y - 1$ را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند.

(۱۰) معادله خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات به موازات خط $3y - x = 1$ رسم شود.

(۱۱) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(6, 8)$ می‌گذرد و بر خط L به معادله $4y - 5x = -5$ عمود است.

(۱۲) معادله خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و بر خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(2, -1)$ و $B(-3, 0)$ عمود باشد.

(۱۳) خط $y = mx + n$ از نقاط $A(0, 1)$ و $B(2, 4)$ می‌گذرد. مقادیر m و n را بیابید.

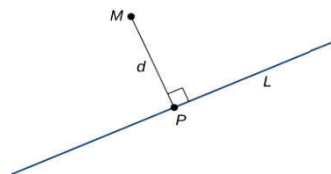
(۱۴) سه خط زیر مفروض است. مقدار m را طوری تعیین کنید که سه خط زیر، از یک نقطه بگذرند.

$$2y = 3x + 5 \qquad y = 5x - 8 \qquad 3y - 4x + m = 0$$

۵-۵ فاصله نقطه از خط

۵-۵-۱ تعریف: برای به دست آوردن فاصله نقطه $M(x_1, y_1)$ از خط L به معادله $ax + by + c = 0$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



مثال ۲۰: فاصله نقطه $A(2, 4)$ را از خط L به معادله $2x - 4y = -8$ به دست آورید.

حل: ابتدا در معادله خط همه مقادیر را به یک طرف تساوی منتقل کرده تا معادله خط به صورتی که در بالا بیان شد به دست آید. لذا داریم:

$$2x - 4y + 8 = 0$$

از مقایسه معادله فوق با شکل کلی $ax + by + c = 0$ داریم:

$$a = 2, \quad b = -4, \quad c = 8$$

از طرفی $x_1 = 2$ و $y_1 = 4$. بنابراین:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(2) + (-4)(4) + 8|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{20}} = \frac{4}{\sqrt{20}}$$

مثال ۲۱: فاصله نقطه $A(1, 5)$ را از خط L به معادله $x = 4$ به دست آورید.

حل: ابتدا در معادله خط همه مقادیر را به یک طرف تساوی منتقل کرده تا معادله خط به صورت $x - 4 = 0$ به دست آید.

از مقایسه این معادله با شکل کلی $ax + by + c = 0$ داریم:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -4$$

از طرفی $x_1 = 1$ و $y_1 = 5$ بنابراین:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(1) + (0)(5) - 4|}{\sqrt{1^2 + 0}} = \frac{|-3|}{\sqrt{1}} = 3$$

مثال ۲۲: فاصله $A(4, 7)$ را از خط L به معادله $2y = 3$ به دست آورید.

حل: ابتدا در معادله خط همه مقادیر را به یک طرف تساوی منتقل کرده تا معادله

خط به صورت $0 = 2y + 6$ به دست آید.

از مقایسه معادله فوق با شکل کلی $ax + by + c = 0$ داریم:

$$a = 0, \quad b = 2, \quad c = 6$$

از طرفی $x_1 = 4$ و $y_1 = 7$ بنابراین:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(0)(4) + (2)(7) + 6|}{\sqrt{0 + 2^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{4}} = 10$$

تمرین

(۱) فاصله مبدأ مختصات را از خط L به معادله $2x + 3y = 5$ به دست آورید.

(۲) فاصله نقطه $A(0, 2)$ را از خط L به معادله $3x = 4$ بیابید.

(۳) فاصله نقطه $A(1, 3)$ را از خط L به معادله $4y - 1 = 0$ به دست آورید.

(۴) فاصله نقطه $A(4, 5)$ را از خط L به معادله $y = 1$ به دست آورید.

۵-۶ دایره

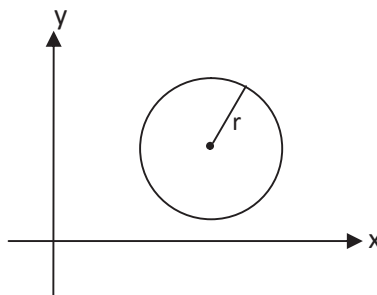
۵-۶-۱ تعریف: به مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت مانند (x_0, y_0) فاصله یکسان داشته باشند، دایره می‌گویند. نقطه‌ی ثابت را مرکز دایره و فاصله‌ی ثابت را شعاع دایره نامیده و آن را با r نشان می‌دهیم.

معادله دایره: فرض کنید $A(x, y)$ نقطه دلخواهی از دایره باشد، $C(x_0, y_0)$ مرکز دایره و r شعاع دایره باشد دراین صورت با توجه به فرمول فاصله دو نقطه معادله دایره برابر است با:

$$AC = r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

لذا داریم:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



مثال ۲۳: معادله دایره‌ای با مرکز $C(3, 4)$ و شعاع ۲ را بنویسید.

حل: با توجه به فرمول معادله دایره و با فرض $r = 2$ ، $x_0 = 3$ و $y_0 = 4$

داریم:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

مثال ۲۴: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $C(۲, ۶)$ است و از نقطه $A(۵, ۱)$ می‌گذرد.

حل: ابتدا شعاع دایره را به دست آورده، سپس معادله دایره را می‌نویسیم:

$$r = AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (6 - 1)^2} \\ = \sqrt{34}$$

با توجه به فرمول معادله دایره و با فرض $r = \sqrt{34}$ داریم:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 34$$

مثال ۲۵: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط دو سر قطر آن $A(۱, -۴)$ و $B(۳, ۲)$ باشند.

حل: ابتدا با توجه به این نکته که مرکز دایره وسط قطر قرار دارد، مختصات مرکز دایره را با استفاده از تعریف به دست می‌آوریم:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -1$$

همچنین می‌دانیم که اندازه شعاع دایره نصف قطر می‌باشد، لذا داریم:

$$r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - (-4))^2} = \sqrt{40}$$

حال با دانستن مرکز و شعاع دایره، می‌توانیم معادله دایره را بنویسیم:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = (\sqrt{40})^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 40$$

تمرین

(۱) معادله دایره‌ای با مرکز $C(۸,۲)$ و شعاع ۴ را بنویسید.

(۲) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $C(-۱,۴)$ است و از نقطه $A(۱,۲)$ می‌گذرد.

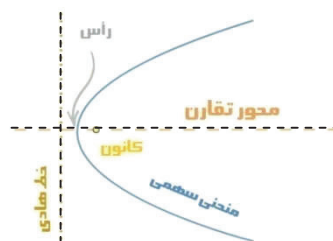
(۳) معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط دو سر قطر آن $A(-۵,۴)$ و $B(-۱,۳)$ باشند.

(۴) معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط دو سر قطر آن $A(-۶,۳)$ و $B(-۵,۴)$ باشند.

(۵) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $C(۲,۱)$ است و بر خط L به معادله $۶x + ۸y - ۱۰ = ۰$ مماس است.

۷-۵ سهمی

۷-۵-۱ تعریف: سهمی مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آن نقاط از یک نقطه ثابت به نام کانون و از یک خط ثابت به نام خط هادی برابر باشند. خط عمود از کانون بر خط هادی را، محور تقارن سهمی می‌نامند. محل برخورد محور تقارن و سهمی را رأس سهمی می‌گویند.



معادله سهمی: هرگاه محور تقارن سهمی موازی محور x ها باشد، معادله سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد و اگر محور تقارن سهمی موازی محور y ها باشد، معادله سهمی به صورت $x = ay^2 + bx + c$ می‌باشد.

۵-۷-۱ نکته: در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ طول رأس سهمی برابر است با $x = \frac{-b}{2a}$ و محور تقارن آن خط $x = \frac{-b}{2a}$ می‌باشد. اگر $a > 0$ باشد جهت سهمی به سمت بالا باز می‌شود و اگر $a < 0$ باشد جهت سهمی به سمت پایین خواهد بود.

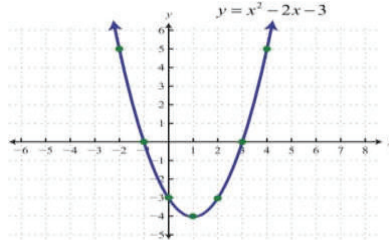
۵-۷-۲ نکته: در سهمی $x = ay^2 + bx + c$ عرض رأس سهمی برابر است با $y = \frac{-b}{2a}$ و محور تقارن آن خط $y = \frac{-b}{2a}$ است. اگر $a > 0$ باشد جهت سهمی به سمت راست و اگر $a < 0$ باشد جهت سهمی به سمت چپ خواهد بود.

مثال ۲۶: مشخصات سهمی $y = x^2 - 2x - 3$ را تعیین و سپس آن را رسم کنید.

حل: بنا به نکته ۵-۷-۱ طول رأس سهمی برابر با $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1$ است و عرض آن برابر است با $y = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$. لذا مختصات رأس سهمی $(1, -4)$ است. چون $a = 1 > 0$ ، بنابراین جهت سهمی به سمت بالا باز می‌شود. مقادیر -1 ، 0 و 3 را به دلخواه در ضابطه $y = x^2 - 2x - 3$ جانشین کرده و مقادیر y را به دست آورده و با استفاده از جدول زیر نمودار سهمی را رسم می‌کنیم.

x	-1	0	1	3
$x^2 - 2x - 3$	0	-3	-4	0

نمودار این سهمی به شکل زیر می‌باشد:

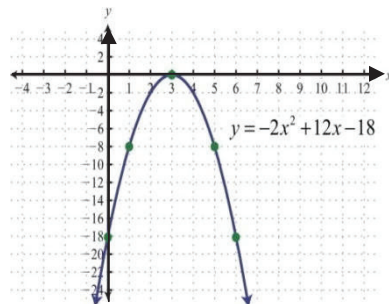


مثال ۲۷: مشخصات سهمی $y = -2x^2 + 12x - 18$ را تعیین و سپس آن را رسم نمایید.

حل: بنا به نکته ۵-۷-۱ طول رأس سهمی برابر با $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-2)} = 3$ و عرض آن برابر است با $y = -2(3)^2 + 12(3) - 18 = 0$. پس مختصات رأس سهمی $(3, 0)$ می‌باشد. محور تقارن سهمی نیز خط $x = \frac{-b}{2a} = 3$ است. چون $a = -2 < 0$ ، پس جهت سهمی به سمت پایین باز می‌شود. مقادیر ۱، ۰ و ۵ را به دلخواه در ضابطه $y = -2x^2 + 12x - 18$ جانشین کرده و مقادیر y را به دست آورده و با استفاده از جدول زیر نمودار سهمی را رسم می‌کنیم.

x	۰	۱	۳	۵
$y = -2x^2 + 12x - 18$	-۱۸	-۸	۰	-۸

نمودار این سهمی به شکل زیر می‌باشد:



پیدا کردن معادله سهمی:

تاکنون یاد گرفتیم که چگونه با داشتن معادله سهمی، نمودار آن را رسم کنیم، اما گاهی با حالتی مواجه می‌شویم که برعکس است؛ یعنی ممکن است که نقاطی را داشته باشیم و بخواهیم معادله سهمی را به دست آوریم که از این نقاط عبور می‌کنند.

برای این کار نقاط داده شده را در معادله $y = ax^2 + bx + c$ قرار می‌دهیم تا رابطه‌ای بین a ، b و c پیدا شود. اگر اطلاعات دیگری در مساله داده شده باشد مانند رأس سهمی، محور تقارن و غیره از این روابط استفاده کرده تا رابطه‌هایی دیگر بین a, b, c پیدا کنیم. رابطه‌های به دست آمده را به صورت دستگاه چند معادله چند مجهولی حل کرده تا مقادیر a ، b و c مشخص شود.

مثال ۲۸: نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور x ها را در نقاطی به طول ۳- و ۱ قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

حل: نمودار محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده، پس مختصات نقطه $(0, 3)$ در معادله سهمی صدق می‌کند:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow 3 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 3$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + 3$ خواهد شد. بنا به فرض سهمی محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند، در نتیجه مختصات نقطه $(-3, 0)$ در معادله سهمی صدق می‌کند. لذا داریم:

$$0 = a(-3)^2 + b(-3) + 3 \quad (1)$$

همچنین سهمی محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند، لذا مختصات نقطه $(۱, ۰)$ در معادله سهمی صدق می‌کند. در نتیجه داریم:

$$۰ = a(۱)^2 + b(۱) + ۳ \quad (۲)$$

رابطه (۱) و (۲) را در یک دستگاه گذاشته و آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۹a - ۳b = -۳ \\ a + b = -۳ \end{cases}$$

طرفین معادله دوم را در عدد ۳ ضرب کرده تا ضریب y در دو معادله قرینه شود.

$$\begin{cases} ۹a - ۳b = -۳ \\ ۳a + ۳b = -۹ \end{cases}$$

سپس دو معادله را با هم جمع می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$(۹a - ۳b) + (۳a + ۳b) = -۳ + (-۹)$$

$$۱۲a = -۱۲$$

$$a = -۱$$

مقدار $a = -۱$ را به دلخواه در معادله $a + b = -۳$ قرار می‌دهیم. داریم:

$$-۱ + b = -۳$$

$$b = -۲$$

پس معادله سهمی به صورت زیر خواهد بود:

$$y = -x^2 - ۲x + ۳$$

برای رسم سهمی طول رأس سهمی برابر است با $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-۲)}{2(-۱)} = -۱$ و

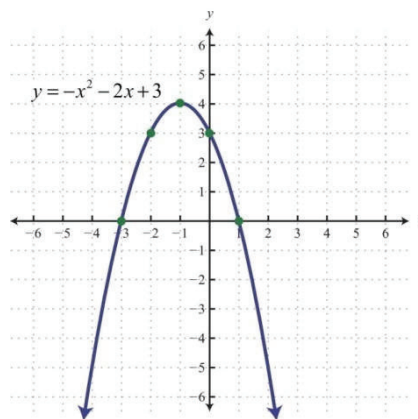
عرض آن برابر است با $y = -(-۱)^2 - ۲(-۱) + ۳ = ۴$. لذا مختصات رأس

سهمی $(-۱, ۴)$ می‌باشد. محور تقارن سهمی نیز خط $x = -۱$ است.

چون $a = -1 < 0$ ، پس جهت سهمی به سمت پایین باز می‌شود. با استفاده از نقطه یابی جدول زیر را داریم:

x	-۳	-۱	۰	۱
$y = -x^2 - 2x + 3$	۰	۴	۳	۰

پس اکنون با داشتن این نقاط می‌توانیم سهمی را رسم کنیم:



مثال ۲۹: معادله سهمی را به دست آورید که مختصات رأس آن $(-1, 3)$ باشد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع کند.

حل: سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند، پس مختصات نقطه $(0, 5)$ در معادله $y = ax^2 + bx + c$ صدق می‌کند. بنابراین داریم:

$$5 = a(0)^2 + b(0) + c$$

لذا مقدار c برابر ۵ است.

طول رأس سهمی برابر است با $x = \frac{-b}{2a} = -1$ است. لذا داریم $b = 2a$. پس مقدار $b = 2a$ در معادله $y = ax^2 + bx + 5$ صدق می‌کند:

$$y = ax^2 + 2ax + 5$$

مختصات رأس سهمی $(-1, 3)$ می‌باشد. لذا مقدار آن در معادله سهمی صدق می‌کند.

$$3 = a(-1)^2 + 2a(-1) + 5$$

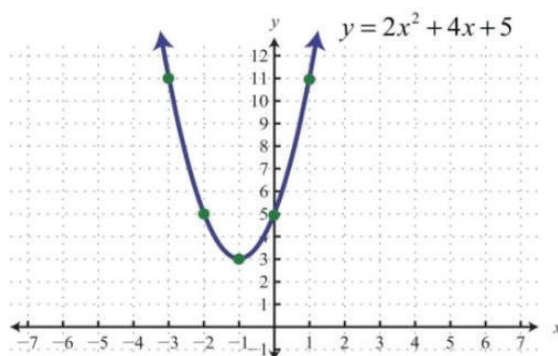
لذا مقدار a برابر ۲ است و چون $b = 2a$ پس $b = 4$ و معادله سهمی به صورت زیر خواهد شد:

$$y = 2x^2 + 4x + 5$$

برای رسم نمودار سهمی بنا به فرض مختصات رأس سهمی $(-1, 3)$ می‌باشد و محور تقارن سهمی خط $x = -1$ است. چون $a = 2 > 0$ ، بنابراین جهت سهمی به سمت بالا باز می‌شود. مقادیر -3 ، 0 و 1 را به دلخواه در ضابطه سهمی $y = 2x^2 + 4x + 5$ جانشین کرده و مقادیر y را به دست آورده و با استفاده از جدول زیر نمودار سهمی را رسم می‌کنیم.

x	-3	-1	0	1
$y = 2x^2 + 4x + 5$	11	3	5	11

نمودار این سهمی به شکل زیر می‌باشد:



تمرین

مختصات رأس، کانون، خط هادی و محور تقارن سهمی‌های زیر را تعیین و سپس آن‌ها را رسم کنید.

۱) $x = y^2$

۲) $y = x^2$

۳) $x = -y^2$

۴) $y = -x^2$

۵) $x = -y^2 + 2y$

۶) $y = 2x^2 + 4x - 1$

۷) $x = y^2 - 9y + 3$

۸) $y = -x^2 + 2x$

۹) $x = 3y^2 - 6y + 1$

۱۰) $y = -3x^2 + 6x - 9$

۱۱) $x = y^2 - 2y - 2$

۱۲) $y = x^2 - 8x + 4$

۱۳) $x = -y^2 - 5y + 4$

۱۴) $y = 2x^2 - x + 1$

۱۵) نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ و محور x ها را در نقاط به طول ۳ و ۵ قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

۱۶) معادله سهمی را به دست آورید که مختصات راس آن $(-1, 1)$ باشد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کند.

۱۷) معادله سهمی را به دست آورید که از سه نقطه $(1, 1)$ ، $(2, 4)$ ، $(3, 9)$ بگذرد.

۱۸) معادله سهمی را بنویسید که رأس آن $(-1, 2)$ باشد و از نقطه $(-2, 0)$ بگذرد و محور تقارن آن موازی محور y ها باشد.

فصل ششم: مثلثات

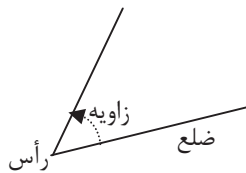
مثلثات از علوم پایه و از مهم‌ترین ابزار ستاره‌شناسان بوده است. امروزه به جرأت می‌توان گفت در تمامی علوم، به‌ویژه علوم مهندسی مثلثات نقش اساسی ایفا می‌کند. مانند حرکت نوسانی پاندول‌ها، جریان الکتریکی متناوب، سیکل‌های تجاری و ریتم‌های بیولوژی. در این کاربردها لازم است که قلمرو توابع مثلثاتی مجموعه اعداد حقیقی باشند.

تمامی مفاهیم در مثلثات بر پایه‌ی نسبت‌ها و روابط بین اجزاء یک مثلث بنا می‌شوند. سه جزء مهم در یک مثلث زاویه‌های آن هستند.

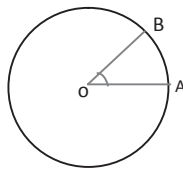
در هندسه‌ی اقلیدسی تعریف زاویه از ظرافت خاصی برخوردار است که در این جا به آن نمی‌پردازیم و به تعریف ساده‌تری برای زاویه بسنده می‌کنیم.

۱-۶ زاویه و مقیاس‌های اندازه‌گیری زاویه

۱-۱-۶ تعریف: زاویه قسمتی از صفحه است، متشکل از دو نیم‌خط که از یک نقطه خارج شده‌اند. این دو نیم‌خط را اضلاع زاویه و آن نقطه را رأس زاویه می‌نامیم.

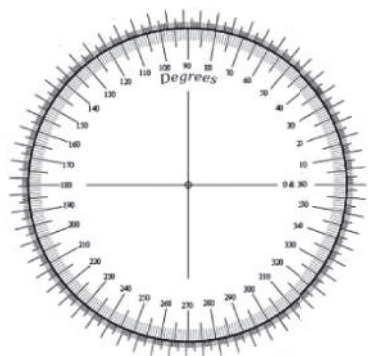


۲-۱-۶ تعریف: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و دو ضلع آن در امتداد شعاع دایره باشد زاویه مرکزی می‌نامند.

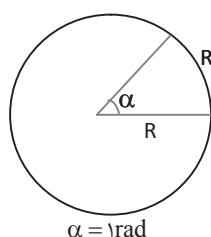


برای اندازه‌گیری زاویه از مقیاس‌های درجه، گراد و رادیان استفاده می‌شود.

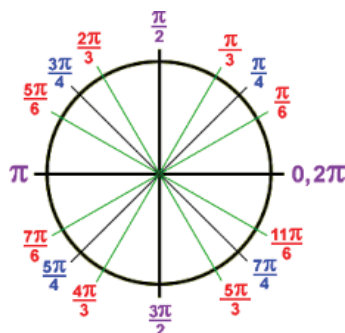
۳-۱-۶ تعریف: اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت تقسیم کنیم، آن‌گاه اندازه زاویه مرکزی روبرو به هر قسمت را یک درجه می‌نامیم.



۶-۱-۴ تعریف: هرگاه محیط دایره به 2π قسمت تقسیم شود، هر قسمت یک رادیان نامیده می‌شود. بنابراین یک رادیان اندازه زاویه مرکزی روبرو به کمانی از دایره است که طول آن برابر با شعاع دایره است. پس اندازه زاویه مرکزی مقابل به محیط دایره برابر با 2π رادیان است.



۶-۱-۱ نکته: در شکل زیر زوایا با رادیان نشان داده شده است.



۶-۱-۵ تعریف: اگر محیط دایره را به ۴۰۰ درجه تقسیم کنیم، آن‌گاه اندازه زاویه مرکزی روبرو به هر قسمت را یک گراد می‌نامیم.

۶-۱-۶ تعریف: اگر اندازه زاویه را برحسب درجه با D ، برحسب گراد با G و برحسب رادیان با R نشان دهیم، آن‌گاه با استفاده از رابطه‌ی زیر می‌توان تمامی مقیاس‌های اندازه‌گیری را به یکدیگر تبدیل کنیم.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}$$

مثال ۱: اندازه زاویه‌ای $\frac{\pi}{6}$ رادیان است. اندازه این زاویه را به درجه تبدیل کنید.

حل: برای تبدیل رادیان به درجه تبدیل کافی است در تناسب

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}, \text{ جای رادیان (R) مقدار } \frac{\pi}{6} \text{ را قرار دهیم. لذا داریم:}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi}$$

در نتیجه:

$$D = \frac{180 \times \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30^\circ$$

مثال ۲: اندازه زاویه‌ای 45° درجه است. اندازه این زاویه را به رادیان تبدیل کنید.

حل: می‌خواهیم درجه را به رادیان تبدیل نماییم، پس در تناسب

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}, \text{ جای درجه (D) مقدار } 45^\circ \text{ را قرار دهیم. لذا داریم:}$$

$$\frac{45}{180} = \frac{R}{\pi}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که:

$$R = \frac{\pi \times 45}{180} = \frac{\pi}{4}$$

مثال ۳: اندازه زاویه‌ای 100° گراد است. اندازه این زاویه را به درجه تبدیل کنید.

حل: می‌خواهیم گراد را به درجه تبدیل نماییم، پس در تناسب $\frac{D}{180} = \frac{G}{200}$ جای

گراد (G) مقدار 100° را قرار می‌دهیم. لذا داریم:

$$\frac{D}{180} = \frac{100}{200}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که:

$$D = \frac{100 \times 180}{200} = 90^\circ$$

مثال ۴: اندازه زاویه‌ای 90° درجه است. اندازه این زاویه را به گراد تبدیل کنید.

حل: می‌خواهیم درجه را به گراد تبدیل نماییم، پس در تناسب $\frac{D}{180} = \frac{G}{200}$ جای درجه (D) مقدار ۹۰ را قرار می‌دهیم. پس داریم:

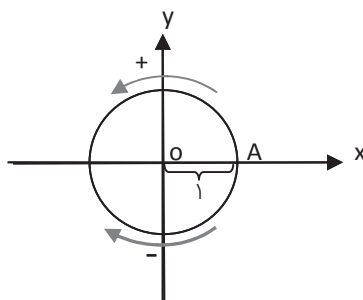
$$\frac{90}{180} = \frac{G}{200}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم:

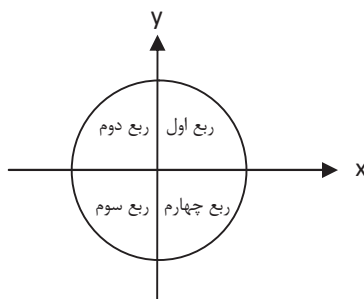
$$G = \frac{90 \times 200}{180} = 100$$

۲-۶ دایره مثلثاتی

۱-۲-۶ تعریف: به دایره‌ای جهت‌دار که مرکز آن مبدأ مختصات و شعاع آن یک و جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت به عنوان جهت مثبت اختیار شده باشد دایره مثلثاتی می‌گوییم.

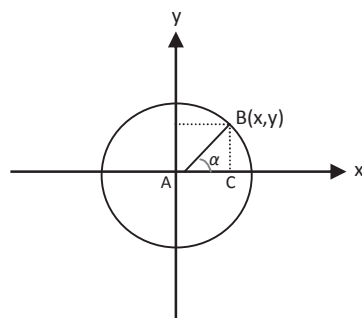


۱-۲-۶ نکته: دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ دایره مثلثاتی را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا ربع مثلثاتی به شرح شکل زیر می‌نامیم.



۳-۶ نسبت‌های مثلثاتی

۱-۳-۶ تعریف: در شکل زیر نقطه B را روی دایره مثلثاتی طوری در نظر گرفته که قسمت مثبت محور x ها با AB زاویه α بسازد و از B بر محور x ها عمود کرده تا محور x ها را در نقطه C قطع کند. با فرض این که $AC = x$ ، $BC = y$ ، چهار نسبت مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را در مثلث قائم الزاویه ABC به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$\sin \alpha = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } \alpha}{\text{اندازه وتر}} = \frac{BC}{AB} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } \alpha}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } \alpha}{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } \alpha} = \frac{BC}{AC} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } \alpha}{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } \alpha} = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{y}$$

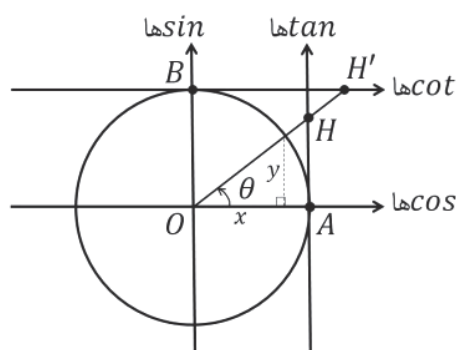
به عبارت دیگر اگر $B(x,y)$ نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی باشد، آن‌گاه

$$y = \sin \alpha \text{ و } x = \cos \alpha$$

۴-۶ محورهاى مثلثاتى

متناظر با چهار نسبت مثلثاتى سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت چهار محور مثلثاتى تعريف مى‌شود که این محورها کمک موثرى در مطالعه‌ی ویژگی‌های نسبت‌های مثلثاتى مى‌کنند. در دایره مثلثاتى با شناخت محورها و رسم آن‌ها به راحتی مى‌توانیم مقادیر زوایای مختلف و علامت آن‌ها را پیدا کنیم.

۱-۴-۶ تعريف: در دایره مثلثاتى محور طول‌ها، محور کسینوس‌ها و محور عرض‌ها، محور سینوس‌ها نامیده مى‌شود. اگر به موازات محور سینوس‌ها از نقطه A خطى به موازات محور سینوس‌ها رسم کنیم، این خط محور تانژانت‌ها نامیده خواهد شد. همچنین اگر به موازات محور کسینوس‌ها از نقطه B خطى به موازات محور کسینوس‌ها رسم کنیم این محور، محور کتانژانت‌ها نام دارد.



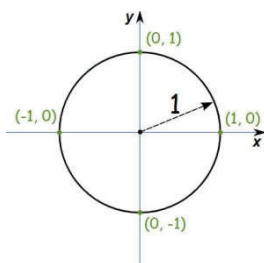
۱-۴-۶ نکته: بنا به تعريف ۱-۴-۶ علامت سینوس همواره با علامت y و علامت کسینوس همواره با علامت x برابر است. اگر امتداد زاویه، خط $x=1$ را در بالای محور xها قطع کرد، علامت تانژانت مثبت و در غیر این صورت منفى است. همچنین اگر امتداد زاویه، خط $y=1$ را در بالای محور yها قطع کرد، علامت کتانژانت مثبت و در غیر این صورت منفى است.

با توجه به نکته ۱-۴-۶ جدول علامت نسبت‌های مثلثاتی به شرح زیر می‌باشد:

زاویه نسبت مثلثاتی	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
ربع اول	+	+	+	+
ربع دوم	+	-	-	-
ربع سوم	-	-	+	+
ربع چهارم	-	+	-	-

مثال ۵: نسبت‌های مثلثاتی زاویه 0° ، 90° و 180° را به دست آورید.

حل:



با توجه به شکل فوق برای محاسبه زاویه 0° داریم: $x = 1$ و $y = 0$. لذا با استفاده از تعریف ۱-۳-۶ نتیجه می‌گیریم که:

$$\sin 0^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 0^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} = \infty$$

برای محاسبه زاویه ۹۰° داریم: $x = ۰$ و $y = ۱$.

$$\sin ۹۰^\circ = \frac{y}{r} = \frac{۱}{۱} = ۱$$

$$\cos ۹۰^\circ = \frac{x}{r} = \frac{۰}{۱} = ۰$$

$$\tan ۹۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{۱}{۰} = \infty$$

$$\cot ۹۰^\circ = \frac{x}{y} = \frac{۰}{۱} = ۰$$

همچنین برای محاسبه زاویه ۱۸۰° داریم: $x = -۱$ و $y = ۰$.

$$\sin ۱۸۰^\circ = \frac{y}{r} = \frac{۰}{۱} = ۰$$

$$\cos ۱۸۰^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-۱}{۱} = -۱$$

$$\tan ۱۸۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{۰}{-۱} = ۰$$

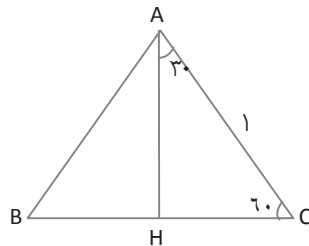
$$\cot ۱۸۰^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-۱}{۰} = \infty$$

۶-۴-۲ نکته: با توجه به مثال‌های قبل در جدول زیر بعضی از نسبت‌های مثلثاتی مهم آورده شده است:

زاویه نسبت مثلثاتی	۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin \alpha$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot \alpha$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۵-۶ محاسبه نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه حاده

۱-۵-۶ تعریف: برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۳۰° درجه یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع ۱ مطابق شکل زیر در نظر گرفته، ارتفاع وارد بر ضلع BC را AH نامیده، با توجه به این‌که در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع و میانه و نیسماز با هم برابر هستند و زاویه‌ها در مثلث متساوی‌الاضلاع ۶۰° درجه است، پس دو مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌های ۳۰° و ۶۰° درجه داریم. ارتفاع این مثلث با استفاده از رابطه فیثاغورث برابر است با:



$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$1^2 = AH^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$AH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

لذا نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۳۰° درجه برابر است با:

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } 30^\circ}{\text{اندازه وتر}} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } 30^\circ}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } 30^\circ}{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } 30^\circ} = \frac{HC}{AH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } 30^\circ}{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } 30^\circ} = \frac{AH}{HC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

همچنین نسبت‌های مثلثاتی زاویه 60° درجه برابر است با:

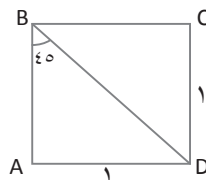
$$\sin 60^\circ = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } 60^\circ}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } 60^\circ}{\text{اندازه وتر}} = \frac{HC}{AC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } 60^\circ}{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } 60^\circ} = \frac{AH}{HC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } 60^\circ}{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } 60^\circ} = \frac{HC}{AH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۶-۵-۲ تعریف: برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه 45° درجه، مربعی به طول ضلع ۱ در نظر گرفته و یکی از قطرهای آن را رسم می‌کنیم. با توجه به این که در مربع قطر، همان نیمساز زاویه‌ها هم می‌باشد، مثلثی با دو زاویه 45° درجه داریم که طول قطر آن بنا به رابطه فیثاغورث برابر است با $\sqrt{2}$.



لذا نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۴۵ درجه برابر است با:

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } 45^\circ}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } 45^\circ}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } 45^\circ}{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } 45^\circ} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور به زاویه } 45^\circ}{\text{اندازه ضلع مقابل به زاویه } 45^\circ} = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{1} = 1$$

لذا طبق توضیحات فوق جدول نسبت‌های مثلثاتی زوایای حاده به شرح زیر است:

زاویه نسبت مثلثاتی	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال ۶: مطلوب است محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای که انتهای ضلع دوم آن در نقطه $(-۱, ۲)$ واقع است.

حل: با توجه به این که $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $r = \sqrt{(-۱)^2 + ۲^2} = \sqrt{۵}$ ، لذا:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵} \quad \tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{۲}{-۱} = -۲$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = -\frac{۱}{\sqrt{۵}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۵} \quad \cot \alpha = \frac{x}{y} = -\frac{۱}{۲}$$

مثال ۷: در یک دایره مثلثاتی $\tan \alpha = \frac{۲}{۵}$ و α در ربع سوم واقع است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را برای زاویه α به دست آورید.

حل: $\tan \alpha = \frac{۲}{۵}$ ، با توجه به این که α در ربع سوم واقع است و در ربع سوم علامت x و y منفی است. پس می‌توان فرض کرد $x = -۵$ و $y = -۲$. برای به دست آوردن سایر نسبت‌های مثلثاتی ابتدا باید مقدار r را محاسبه کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ r &= \sqrt{(-۵)^2 + (-۲)^2} \\ r &= \sqrt{۲۹} \end{aligned}$$

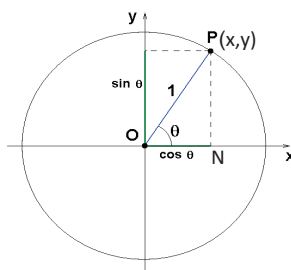
سایر نسبت‌های مثلثاتی برابرند با:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y}{r} = -\frac{۲}{\sqrt{۲۹}} & \cos \alpha &= \frac{x}{r} = \frac{-۵}{\sqrt{۲۹}} \\ \cot \alpha &= \frac{x}{y} = \frac{-۵}{-۲} = \frac{۵}{۲} \end{aligned}$$

۶-۶ روابط اصلی بین نسبت‌های مثلثاتی

اگر x و y نقطه‌ای دلخواه بر روی دایره مثلثاتی باشد، آن‌گاه بنا به شکل زیر و تعریف ۱-۳-۶ داریم $x = \cos \alpha$ و $y = \sin \alpha$. از طرفی x و y طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه OPN با وتر OP به طول یک هستند؛ بنابراین از قضیه فیثاغورس نتیجه می‌گیریم که x و y در معادله $x^2 + y^2 = 1$ صدق می‌کنند. بنابراین با جایگذاری $x = \cos \alpha$ و $y = \sin \alpha$ در این رابطه داریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$



۶-۶-۱ نکته: روابط زیر بین نسبت‌های مثلثاتی برقرار است:

$$۱) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$۲) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$۳) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$۴) \tan \alpha \times \cot \alpha = 1$$

$$۵) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$۶) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

مثال ۸: درستی رابطه $\tan \alpha \times \cot \alpha = 1$ را بررسی کنید.

حل: با توجه به قسمت (۲) و (۳) نکته ۶-۶-۱ داریم:

$$\tan \alpha \times \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

مثال ۹: درستی رابطه $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ را بررسی کنید.

حل: با توجه به قسمت (۲) و (۳) نکته ۶-۶-۱ داریم:

$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

مثال ۱۰: درستی رابطه $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$ را بررسی کنید.

حل: با توجه به قسمت (۱) و (۲) نکته ۶-۶-۱ داریم:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}$$

مثال ۱۱: عبارت $\sin x (\tan x + \cot x)$ را ساده کنید.

حل: با توجه به قسمت (۲) و (۳) نکته ۶-۶-۱ داریم:

$$\begin{aligned} \sin x (\tan x + \cot x) &= \sin x \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \\ &= \sin x \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right) \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

مثال ۱۲: عبارت $\frac{(1 + \tan x)(1 - \cot x)}{(1 - \tan x)(1 + \cot x)}$ را ساده کنید.

حل: با توجه به قسمت (۲) و (۳) نکته ۶-۶-۱ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \tan x)(1 - \cot x)}{(1 - \tan x)(1 + \cot x)} &= \frac{1 - \cot x + \tan x - \tan x \cot x}{1 + \cot x - \tan x - \tan x \cot x} \\ &= \frac{1 - \cot x + \tan x - 1}{1 + \cot x - \tan x - 1} \\ &= \frac{-\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x} \\ &= \frac{-(\cot x - \tan x)}{\cot x - \tan x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

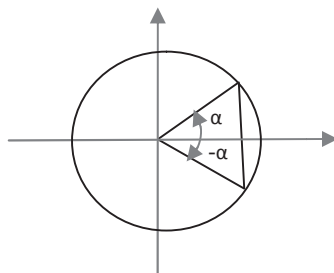
مثال ۱۳: درستی رابطه $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{2}{\cos x}$ را بررسی کنید.

حل: با توجه به قسمت (۱) نکته ۶-۶-۱ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} &= \frac{\cos x(1 - \sin x) + \cos x(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \frac{\cos x - \cos x \sin x + \cos x + \cos x \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \frac{2 \cos x}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2}{\cos x} \end{aligned}$$

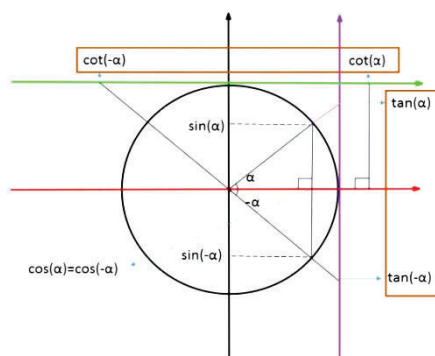
۷-۶ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی بعضی از زاویه‌ها

۷-۶-۱ تعریف: اگر مطابق با شکل زیر یک ضلع زاویه در جهت عقربه‌های ساعت پیموده شود آن‌گاه زاویه‌ی به دست آمده یک زاویه‌ی منفی خواهد بود.



نسبت‌های مثلثاتی $-\alpha$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α

می‌دانیم که زاویه منفی یعنی حرکت در جهت عقربه‌های ساعت. پس در جهت عقربه‌های ساعت به اندازه α پیش می‌رویم. بنابراین با توجه به شکل زیر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که تشکیل می‌شود دقیقاً مشابه مثلث قبلی است، با این تفاوت که در ربع چهارم است. پس سینوس آن منفی و کسینوس مثبت است. تانژانت و کتانژانت هم منفی می‌شوند.



$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha, & \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha, & \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$

مثال ۱۴: نسبت‌های مثلثاتی زاویه $30^\circ -$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

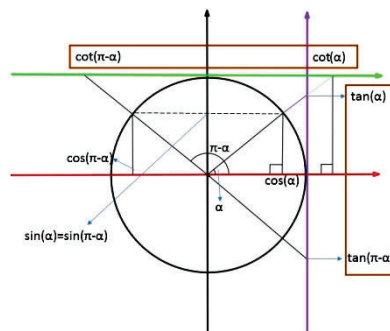
$$\cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی $\pi - \alpha$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α

با در نظر گرفتن شکل زیر می‌بینیم که انتهای کمان مقابل به زاویه $\pi - \alpha$ در ربع دوم دایره مثلثاتی واقع است و با توجه به این که در ربع دوم علامت سینوس مثبت و کسینوس، تانژانت و کتانژانت منفی است داریم:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha, \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$



مثال ۱۵: نسبت های مثلثاتی زاویه ۱۵° را محاسبه کنید.

حل:

$$\sin(۱۵^\circ) = \sin(۱۸^\circ - ۳^\circ) = \sin ۳^\circ = \frac{1}{2}$$

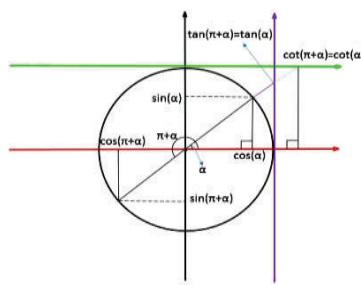
$$\cos(۱۵^\circ) = \cos(۱۸^\circ - ۳^\circ) = -\cos ۳^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(۱۵^\circ) = \tan(۱۸^\circ - ۳^\circ) = -\tan ۳^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot(۱۵^\circ) = \cot(۱۸^\circ - ۳^\circ) = -\cot ۳^\circ = -\sqrt{3}$$

نسبت های مثلثاتی $\pi + \alpha$ بر حسب نسبت های مثلثاتی α

با در نظر گرفتن شکل زیر می بینیم که انتهای کمان مقابل به زاویه $\pi + \alpha$ در ربع سوم دایره مثلثاتی واقع است و با توجه به علامت سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت در ربع سوم داریم:



$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha, \quad \cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

مثال ۱۶: نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۴۰° را محاسبه کنید.

حل:

$$\sin(۲۴۰^\circ) = \sin(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\sin ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(۲۴۰^\circ) = \cos(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ) = -\cos ۶۰^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(۲۴۰^\circ) = \tan(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ) = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot(۲۴۰^\circ) = \cot(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ) = \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{2} - \alpha$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α

هرگاه مقدار $\frac{\pi}{2}$ از زاویه α کم شود، آن‌گاه ابتدا باید علامت نسبت مثلثاتی را با

توجه به این که موقعیت انتهای کمان مقابل به زاویه‌ی $\frac{\pi}{2} - \alpha$ در کدام ربع واقع

است تعیین نمود. سپس نسبت‌های مثلثاتی سینوس به کسینوس، کسینوس به سینوس، تانژانت به کتانژانت و کتانژانت به تانژانت تبدیل می‌شوند.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

۶-۷-۲ تعریف: دو زاویه که مجموع آن‌ها برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد، زاویه متمم نامیده

می‌شوند.

مثال ۱۷: نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{\pi}{6}$ را با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زاویه متمم آن به دست آورید.

حل:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی $\frac{\pi}{2} + \alpha$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α

هرگاه مقدار $\frac{\pi}{2}$ به زاویه α بیفزاییم، آن‌گاه ابتدا باید علامت نسبت مثلثاتی را با

توجه به موقعیت انتهای کمان مقابل به زاویه $\frac{\pi}{2} + \alpha$ تعیین نمود. سپس

نسبت‌های مثلثاتی سینوس به کسینوس، کسینوس به سینوس، تانژانت به کتانژانت،

و کتانژانت به تانژانت تبدیل می‌شوند.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

مثال ۱۸: نسبت‌های مثلثاتی زوایه ۱۳۵° را محاسبه کنید.

حل:

$$\sin(۱۳۵^\circ) = \sin(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(۱۳۵^\circ) = \cos(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(۱۳۵^\circ) = \tan(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot(۱۳۵^\circ) = \cot(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

۶-۷-۱ نکته: نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α و β

بدین شرح می‌باشند:

$$۱) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$۲) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$۳) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$۴) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$۵) \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$۶) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$۷) \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$۸) \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

مثال ۱۹: نسبت‌های مثلثاتی زوایه ۷۵° را محاسبه کنید.

حل: با توجه به این که $۷۵ = ۴۵ + ۳۰$ داریم:

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \\ \cot 75^\circ &= \frac{\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}\end{aligned}$$

مثال ۲۰: نسبت‌های مثلثاتی زاویه 15° را محاسبه کنید.

حل: با توجه به این که $15 = 45 - 30$ داریم:

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$\cot 15^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

۶-۷-۲ نکته: با فرض $\alpha = \beta$ در رابطه (۱)، (۳)، (۵) و (۷) نکته ۶-۷-۱ داریم:

$$۱) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \qquad ۲) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$۳) \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \qquad ۴) \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$۵) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad ۶) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$۷) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \qquad ۸) \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

مثال ۲۱: درستی رابطه $\cos^4 x - \sin^4 x = 2 \cos^2 x - 1$ را بررسی کنید.

حل: ابتدا عبارت داده شده را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه کرده، سپس با توجه به قسمت (۲) و (۴) نکته ۶-۷-۲ داریم:

$$\begin{aligned} \cos^4 x - \sin^4 x &= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)(1) \\ &= \cos 2x(1) \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

مثال ۲۲: درستی رابطه $(\cos x + \sin x + 1)(\cos x + \sin x - 1) = \sin 2x$

را بررسی کنید.

حل: ابتدا عبارت داده شده را با استفاده از اتحاد مزدوج ساده کرده، سپس با

توجه به قسمت (۱) نکته ۶-۷-۲ داریم:

$$\begin{aligned}
 (\cos x + \sin x + 1)(\cos x + \sin x - 1) &= (\cos x + \sin x)^2 - 1^2 \\
 &= \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 1 \\
 &= 1 + 2 \sin x \cos x - 1 \\
 &= 2 \sin x \cos x \\
 &= \sin 2x
 \end{aligned}$$

مثال ۲۳: اگر $\alpha = 15^\circ$ ، مقدار عبارت $\sin^3 \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos^3 \alpha$ را به دست آورید.

حل: اگر در عبارت مذکور از $\sin \alpha \cos \alpha$ فاکتور بگیریم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \sin^3 \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos^3 \alpha &= \sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \\
 &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (-\cos 2\alpha) \\
 &= \frac{1}{2} \sin 30^\circ (-\cos 30^\circ) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{8}
 \end{aligned}$$

مثال ۲۴: نسبت‌های مثلثاتی زاویه $22/5^\circ$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از نسبت‌های زاویه 45° که دو برابر $22/5^\circ$ است و با توجه به نکته ۶-۷-۲ می‌توان نسبت‌های مثلثاتی $22/5^\circ$ را به دست آورد.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 22/5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

بنابراین $\sin ۲۲/۵^\circ = \pm \frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}{۲}$ ، چون زاویه α حاده است، لذا α در ناحیه اول دایره مثلثاتی قرار دارد، پس مقدار سینوس مثبت است. پس داریم:

$$\sin ۲۲/۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}{۲}$$

به همین ترتیب داریم:

$$\cos^۲ \alpha = \frac{1 + \cos ۲\alpha}{۲}$$

$$\cos^۲ ۲۲/۵^\circ = \frac{1 + \cos ۴۵^\circ}{۲} = \frac{1 + \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲ + \sqrt{۲}}{۴}$$

پس نتیجه می‌گیریم که $\cos ۲۲/۵^\circ = \pm \frac{\sqrt{۲} + \sqrt{۲}}{۲}$ ، زاویه α در ناحیه اول دایره مثلثاتی قرار دارد، پس مقدار کسینوس آن مثبت است. لذا داریم:

$$\cos ۲۲/۵^\circ = \frac{\sqrt{۲} + \sqrt{۲}}{۲}$$

برای محاسبه تانژانت و کتانژانت نیز به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\tan ۲۲/۵^\circ = \frac{\sin ۲۲/۵^\circ}{\cos ۲۲/۵^\circ} = \frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}$$

$$\cot ۲۲/۵^\circ = \frac{\cos ۲۲/۵^\circ}{\sin ۲۲/۵^\circ} = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۲}}$$

تمرین

(۱) اگر در یک دایره مثلثاتی $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ و α در ربع سوم واقع باشد، آن گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی را برای زاویه α به دست آورید.

(۲) اگر در یک دایره مثلثاتی $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$ و α در ربع دوم واقع باشد، آن گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی را برای زاویه α به دست آورید.

(۳) اگر در یک دایره مثلثاتی $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ و α در ربع سوم واقع باشد، آن گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی را برای زاویه α به دست آورید.

مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$$۴) \tan ۲۲۵^\circ$$

$$۵) \cos ۳۰^\circ$$

$$۶) \cot \frac{۴\pi}{۳}$$

$$۷) \sin \frac{۱۱\pi}{۱۲}$$

$$۸) \tan \frac{۳\pi}{۴}$$

$$۹) \cot \frac{۵\pi}{۶}$$

درستی هر یک از روابط زیر را بررسی کنید.

$$۱۰) (\cos x + \sin x)(\tan x + \cot x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

$$۱۱) \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} - \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{4 \tan x}{\cos x}$$

$$۱۲) \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} - \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} = 2$$

$$۱۳) \frac{\sin x}{1 + \cos x} - \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin x}$$

۸-۶ معادلات مثلثاتی

۶-۸-۱ تعریف: هر معادله‌ای که در آن نسبت‌های مثلثاتی وجود داشته باشند، معادله مثلثاتی نامیده می‌شود. معادلات مثلثاتی می‌توانند خیلی ساده و یا خیلی پیچیده باشند. به عنوان مثال، روابط زیر همگی معادله مثلثاتی هستند:

$$\sin^2 x + 1 = \cos x \qquad 2 \cos x \sin x + \sin x = 0$$

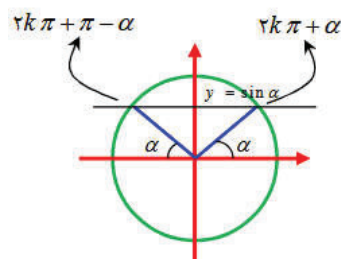
$$(\cos x + 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

منظور از حل معادله مثلثاتی، یافتن کلیه زاویه‌هایی است که در معادله صدق می‌کند. برای حل هر معادله مثلثاتی، ابتدا در صورت نیاز با استفاده از اتحادهای مثلثاتی آن را ساده کرده و سپس با کمک دایره مثلثاتی جواب کلی معادله را به دست می‌آوریم. به طور کلی معادلات مثلثاتی دارای چهار نوع اصلی می‌باشند که در ادامه به آن می‌پردازیم:

$$\sin x = a, \quad \cos x = b, \quad \tan x = c, \quad \cot x = d$$

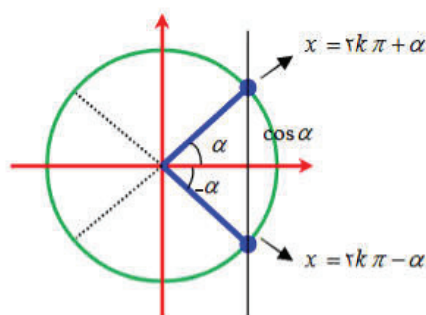
۶-۸-۲ تعریف: با توجه به شکل زیر برای حل معادله $\sin x = a$ ، اگر α یک جواب معادله باشد، $\pi - \alpha$ نیز جواب معادله است. لذا کلیه جواب‌های معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



۳-۸-۶ تعریف: با توجه به شکل زیر برای حل معادله $\cos x = b$ ، اگر α یک جواب معادله باشد، $-\alpha$ نیز جواب است. بنابراین کلیه جواب‌های معادله عبارتند از:

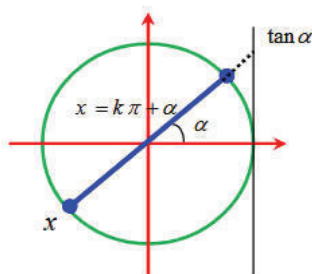
$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



۴-۸-۶ تعریف: با توجه به شکل زیر برای حل معادله $\tan x = c$ ، اگر α یک جواب معادله باشد، $\pi + \alpha$ نیز جواب است. بنابراین کلیه جواب‌های معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi + \alpha = (2k+1)\pi + \alpha \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

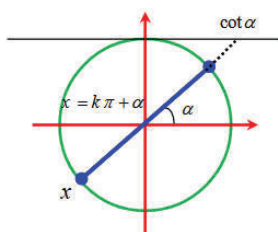
عبارت فوق را به صورت مختصر $x = k\pi + \alpha$ می‌نویسیم.



۶-۸-۵ تعریف: با توجه به شکل زیر برای حل معادله $\cot x = d$ ، اگر α یک جواب معادله باشد، $\pi + \alpha$ نیز جواب است. لذا کلیه جواب‌های معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi + \alpha = (2k+1)\pi + \alpha \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

عبارت فوق را به صورت مختصر $x = k\pi + \alpha$ می‌نویسیم.



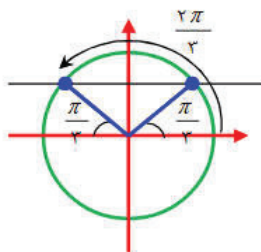
مثال ۲۵: معادله $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

حل: با توجه به شکل زیر برای حل معادله فوق باید همه زوایایی که سینوس

آنها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است را بیابیم. می‌دانیم $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. بنابراین بنا به تعریف ۶-۸-۲

جواب کلی معادله برابر است با:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



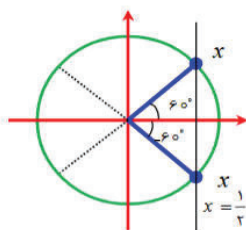
مثال ۲۶: معادله $2\cos x - 1 = 0$ را حل کنید.

حل: با توجه به شکل زیر برای حل معادله $2\cos x - 1 = 0$ باید همه زوایایی که

کسینوس آنها $\frac{1}{2}$ است را بیابیم. می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. لذا بنا به تعریف ۳-۸-۶

جواب کلی معادله برابر است با:

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



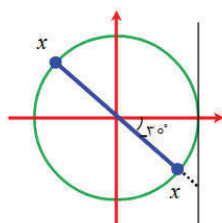
مثال ۲۷: معادله $\sqrt{3} \tan x + 1 = 0$ را حل کنید.

حل: با توجه به شکل زیر برای حل معادله فوق باید همه زوایایی که تانژانت آنها

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ است را بیابیم. می‌دانیم که $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ و $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. بنابراین بنا به

تعریف ۴-۸-۶ جواب کلی معادله برابر است با:

$$x = k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



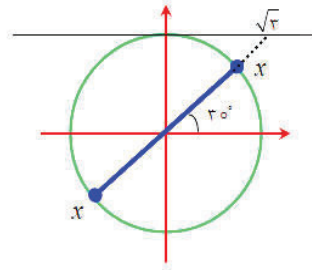
مثال ۲۸: معادله $\cot x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

حل: با توجه به شکل زیر برای حل معادله فوق باید همه زوایایی که کتانژانت

آن‌ها $\sqrt{3}$ است را بیابیم. می‌دانیم که $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ و $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ بنابراین بنا به تعریف ۵-۸-۶

جواب کلی معادله برابر است با:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



تمرین

معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

۱) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$

۲) $\cot x - \sqrt{3} = 0$

۳) $2 \cos x - \sqrt{2} = 0$

۴) $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$

۵) $2 \sin x + \sqrt{5} = 0$

۶) $\cos x - \sin x = 0$

۷) $\tan \sqrt{3}x = 1$

۸) $\sin 2x = \cos(\pi - 3x)$

فصل هفتم: تابع

بشر از روزی که چشم به این عالم هستی باز نموده شاهد قوانین منظم و زیبای حاکم بر این جهان بوده است. انسان با قدم زدن در طبیعت شاهد و ناظر روابطی است که از الگوی ویژه‌ای پیروی می‌کند. اما همواره درک روابط بین اجزای تشکیل دهنده یک پدیده و تحلیل این روابط اهمیت زیادی دارد. در این فصل ابتدا به بررسی مجموعه‌هایی به نام رابطه که اعضای آن‌ها به صورت زوج مرتب هستند پرداخته، سپس با استفاده از آن‌ها تابع را تعریف می‌کنیم.

۷-۱ رابطه

۷-۱-۱ تعریف: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند، R را یک رابطه از A به B گوئیم، هرگاه $R \subseteq A \times B$. به عبارت دیگر یک رابطه مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است.

مثال ۱: هر یک از مجموعه‌های زیر یک رابطه است.

$$R_1 = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$$

$$R_2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, y^2 = x\}$$

$$R_3 = \{(عراق, بغداد), (ایران, تهران), (انگلیس, لندن)\}$$

۷-۱-۲ تعریف: فرض کنید R یک رابطه باشد و $(x, y) \in R$ ، در این صورت بین x و y رابطه R برقرار است یا رابطه R ، x را به y نظیر می‌کند و می‌نویسیم xRy .

مثال ۲: رابطه‌های مثال یک را در نظر گرفته، بنا به تعریف ۷-۱-۲ داریم:

$$1 R_1 2 \quad \text{یا} \quad (1, 2) \in R_1$$

$$9 R_2 3 \quad \text{یا} \quad (9, 3) \in R_2$$

$$\text{انگلیس } R_3 \text{ لندن} \quad \text{یا} \quad (\text{انگلیس، لندن}) \in R_3$$

۷-۱-۳ تعریف: مجموعه تمام مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب یک رابطه را دامنه و مجموعه مؤلفه‌های دوم یک رابطه را برد می‌نامیم.

مثال ۳: در رابطه $R = \{(-3, 4), (5, 7), (6, 8)\}$ ، مجموعه $\{-3, 5, 6\}$ دامنه و مجموعه $\{4, 7, 8\}$ برد R را تشکیل می‌دهند.

۷-۲ مفهوم تابع

اینک در این بخش ابتدا با ذکر یک مثال به تعریف مفهوم تابع و بیان ویژگی‌های آن می‌پردازیم.

مثال ۴: در موارد زیادی پدیده‌های اطراف ما با یکدیگر در ارتباط هستند. به طور مثال رشد پدیده‌ای است که با زمان در ارتباط است. جدول زیر نشان دهنده وزن یک کودک است که تا شش ماهگی ثبت شده است.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$y = f(x)$	۲/۸	۳/۳	۴	۴	۵	۴/۸	۵/۱

همان طور که می‌دانید این امکان وجود دارد که یک کودک در پایان همه‌ی ماه‌ها، دارای وزن‌های متفاوت باشد یا در پایان چند ماه مختلف دارای وزن‌های یکسانی باشد اما غیرممکن است که یک کودک در پایان یک ماه معین دو یا چند وزن متفاوت داشته باشد. در ریاضیات به چنین رابطه‌هایی تابع گفته می‌شود.

۷-۲-۱ تعریف: دو مجموعه A و B را در نظر گرفته، هرگاه f رابطه‌ای از A به B باشد به طوری که در این رابطه هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند، آن‌گاه f را یک تابع از A به B نامیده و آن را با نماد $f: A \rightarrow B$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی A را مجموعه‌ی آغاز و مجموعه‌ی B را مجموعه‌ی انجام (پایان) می‌گوییم. توابع را با حروف کوچک مانند f, g, h و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

به عبارت دیگر تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتبی است که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوتی دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشد.

مثال ۵: مجموعه $f = \{(1, 4), (3, 5), (2, 7), (8, 8)\}$ یک تابع را مشخص می‌کند؛ زیرا در آن هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه‌های اول مساوی نیستند.

مثال ۶: مجموعه $g = \{(1, 2), (5, 7), (6, 6), (5, 8)\}$ یک تابع نیست؛ زیرا دو زوج مرتب متمایز $(5, 7)$ و $(5, 8)$ با مؤلفه‌های اول یکسان متعلق به g هستند.

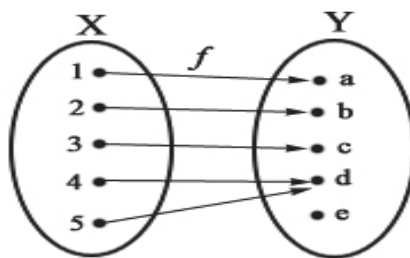
۷-۲-۲ تعریف: مجموعه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل دهنده تابع f را دامنه تابع نامیده و با D_f نشان داده و مجموعه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب را برد تابع نامیده و با R_f نشان می‌دهیم.

۷-۲-۳ تعریف: برد تابع $f: A \rightarrow B$ لزوماً برابر مجموعه B نمی‌باشد، بلکه زیرمجموعه‌ای از آن است. برای تمایز بین مجموعه B و برد تابع f به مجموعه B هم‌دامنه تابع f می‌گویند؛ بنابراین برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه آن هست.

مثال ۷: فرض کنید $A = \{۲, ۴, ۶\}$ و $B = \{a, b, c, d\}$ و تابع $f: A \rightarrow B$ به صورت $f = \{(۲, a), (۴, c), (۶, b)\}$ تعریف شده باشد. دامنه این تابع برابر با مجموعه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب f یعنی $A = \{۲, ۴, ۶\}$ است و برد آن برابر با مجموعه همه مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تابع f یعنی مجموعه $\{a, c, b\}$ است که زیرمجموعه حقیقی B است. به مجموعه B هم‌دامنه می‌گویند.

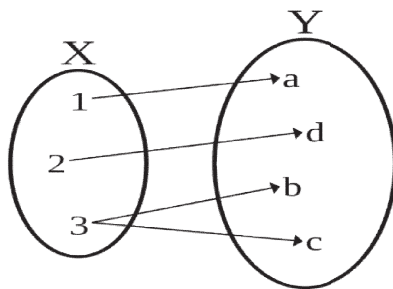
۷-۲-۴ تعریف: منظور از نمودار تابع $f: A \rightarrow B$ به تصویر کشیدن تناظری است که بین دو مجموعه A و B ایجاد می‌کند. برای این کار برای همه روابط و بالاخص توابع عموماً "از نمودار پیکانی استفاده می‌شود. برای رسم نمودار پیکانی تابع $f: A \rightarrow B$ ، دو منحنی بسته نظیر آنچه در نمودار ون استفاده می‌شود را برای نمایش مجموعه A و B انتخاب می‌کنیم و عناصر هر یک را به وسیله نقاطی در آن‌ها مشخص می‌کنیم. سپس بین هر عضو $x \in A$ و $f(x)$ یک پیکان از x به $f(x)$ به نشانه تناظر بین آن دو رسم می‌کنیم.

مثال ۸: دو مجموعه $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $Y = \{a, b, c, d, e\}$ را در نظر گرفته، تابع $f: X \rightarrow Y$ به صورت $f = \{(۱, a), (۲, b), (۳, c), (۴, d), (۵, d)\}$ تعریف شده است. نمودار پیکانی این تابع به صورت زیر می‌باشد:



به عبارت دیگر نمودار پیکانی فوق تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

مثال ۹: تناظر شکل زیر یک تابع نمی‌باشد. زیرا از مجموعه X به دو عضو b و c از مجموعه Y متناظر شده است.



۷-۲-۵ تعریف: به ازای هر عضو x از دامنه f یک و فقط یک عضو از برد مانند y وجود دارد به طوری که $(x, y) \in f$ ، y را مقدار f در x نامیده و به صورت $y = f(x)$ نمایش می‌دهیم. x را متغیر مستقل و $f(x)$ که تصویر x توسط f است را متغیر وابسته نامیده و معادله $y = f(x)$ را ضابطه تابع می‌نامیم.

مثال ۱۰: مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ و ضابطه $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x) = 2x + 5$ مفروض است. f را به صورت زوج مرتب نوشته، تابع بودن آن را بررسی کرده و در صورت تابع بودن دامنه و برد را تعیین کنید.

حل: مقادیر مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ را در ضابطه تابع $f(x) = 2x + 5$ جانشین کرده و مقادیر $f(x)$ را به دست می‌آوریم.

x	۱	۲	۳
$f(x) = 2x + 5$	۷	۹	۱۱

در نتیجه با توجه به جدول فوق داریم:

$$f = \{(1, 7), (2, 9), (3, 11)\}$$

هیچ دو زوج مرتبی در f دارای مؤلفه اول یکسان نیست؛ لذا f تابع است و داریم:

$$D_f = \{1, 2, 3\} \quad \text{و} \quad R_f = \{7, 9, 11\}$$

مثال ۱۱: مجموعه $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ و ضابطه $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت $x^2 + y^2 = 4$ مفروض است، f را به صورت زوج مرتب نوشته و تابع بودن آن را بررسی کنید.

حل: مقادیر مجموعه $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ را در ضابطه تابع $x^2 + y^2 = 4$ جانشین کرده و مقادیر y را به دست می‌آوریم.

x	-2	-1	1	2
y = f(x)	0	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{3}$	0

در نتیجه با توجه به جدول فوق داریم:

$$f = \{(-2, 0), (-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3}), (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}), (2, 0)\}$$

f تابع نیست؛ زیرا به طور مثال دو زوج مرتب متمایز $(-1, \sqrt{3})$ و $(-1, -\sqrt{3})$ در f هستند که دارای مؤلفه‌های اول یکسان می‌باشند.

۷-۲-۱ نکته: برای این که نشان دهیم یک رابطه از روی ضابطه آن تابع نیست، باید مثال نقضی برای آن آورده شود. بنابراین کافی است نشان دهیم به ازای x از دامنه دو مقدار متفاوت برای y به دست می‌آید.

مثال ۱۲: معادله $|y + 2| + x = 4$ تابع نیست؛ زیرا به عنوان مثال، به ازای $x = 0$ دو مقدار $y = 2$ و $y = -6$ برای y حاصل می‌شود و این با تعریف تابع تناقض دارد.

مثال ۱۳: رابطه $f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y^2 = 2x + 1\}$ ضابطه یک تابع نیست؛ زیرا به عنوان مثال، به ازای $x = 0$ دو مقدار $y = 1$ و $y = -1$ برای y به دست می‌آید که این با تعریف تابع تناقض دارد.

تمرین

(۱) تابع بودن مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

$$A = \{(1, 2), (-1, 2), (3, 2)\}$$

$$B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, y \leq x\}$$

$$C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, y^2 = x\}$$

$$D = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y^2 = x\}$$

$$E = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = \sqrt[3]{1 - 2x}\}$$

$$F = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = \frac{x+2}{2x-3}\}$$

$$G = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, y = \frac{1}{x}\}$$

$$H = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y^2 = \frac{x^2}{1+x^2}\}$$

در تمرین‌های زیر مجموعه A و ضابطه $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده، f را به صورت زوج مرتب نوشته، تابع بودن آن را بررسی کرده و در صورت تابع بودن دامنه، هم‌دامنه و برد را تعیین کنید.

$${}^2)f(x) = 3x - 7, \quad A = \{-3, -2, -1, 0\}$$

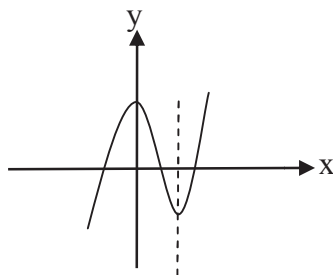
$${}^3)f(x) = 6x^2 - 1, \quad A = \{-4, 2, 1, 3\}$$

$${}^4)f(x) = 3x^2 + 4x - 5, \quad A = \{0, 1, 2, 3\}$$

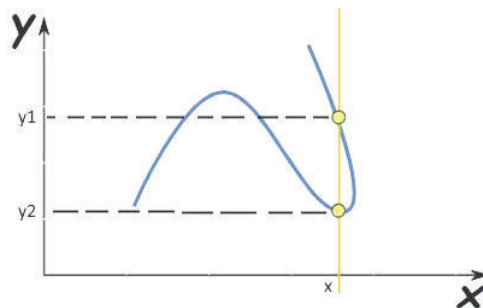
۷-۳ تشخیص تابع از روی نمودار

۷-۳-۱ تعریف: نموداری، نمایش تابع است که هر خط موازی محور y ها، آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال ۱۴: نمودار زیر نمایش یک تابع می باشد:



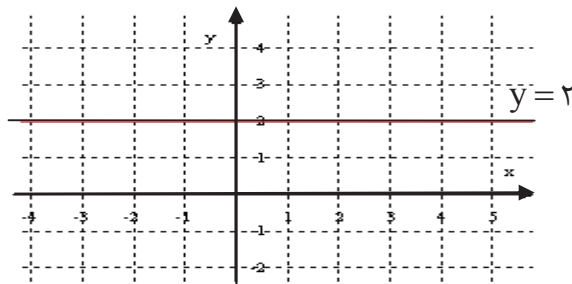
مثال ۱۵: نمودار زیر نمایش یک تابع نیست؛ زیرا خطی موازی محور y ها، وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می کند.



۷-۴ معرفی چند تابع خاص

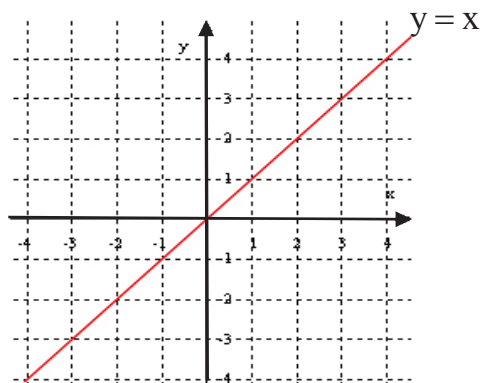
۷-۴-۱ تعریف: هرگاه تابع f از مجموعه A به مجموعه $B \neq \emptyset$ طوری تعریف شده باشد که همه اعضاء A را فقط به یک عضو از مجموعه B ببرد، در این حالت می‌گوییم f یک تابع ثابت است. به عبارت دیگر، تابعی ثابت است که به ازای هر x متعلق به مجموعه A ، $f(x) = k$ ، که در آن k متعلق به مجموعه B است.

مثال ۱۶: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $y = f(x) = 2$ یک تابع ثابت است و نمودار آن به شکل زیر می‌باشد:



۷-۴-۲ تعریف: فرض کنیم f تابعی از مجموعه A به مجموعه A باشد، به طوری که هر عضو مجموعه A را به خودش متناظر کند. در این حالت تابع f را تابع همانی گوییم و ضابطه آن را به صورت $f(x) = x$ تعریف می‌کنیم.

مثال ۱۷: تابع f از مجموعه $\mathbb{R}$ به مجموعه $\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x$ ، یک تابع همانی است و نمودار آن نیمساز ربع اول و سوم می‌باشد.

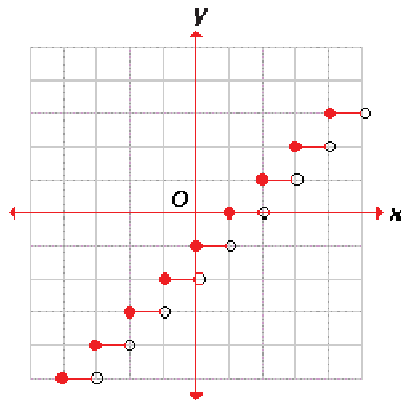


۷-۴-۳ تعریف: برای هر عدد حقیقی x ، عدد صحیحی مانند n موجود است به طوری که: $n \leq x < n+1$. عدد صحیح n را جزء صحیح x گوییم و با نماد $[x] = n$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۸: جزء صحیح چند عدد بر اساس تعریف آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} [2] &= 2 & [2/5] &= 2 \\ [-5/5] &= -6 & [-3/5] &= -4 \\ [-3] &= -3 & [0] &= 0 \\ [0/4] &= 0 & [-0/4] &= -1/4 \end{aligned}$$

۴-۴-۷ تعریف: تابع جزء صحیح $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را با نماد $f(x) = [x]$ نشان داده و به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، برابر است با بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x . پس دامنه این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{Z}$ است. به این تابع، تابع پلکانی هم گفته می‌شود؛ زیرا نمودارش شبیه به پلکان است و نمودار آن به شکل زیر است:



۵-۴-۷ تعریف: قدرمطلق عدد حقیقی x را با نماد $|x|$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

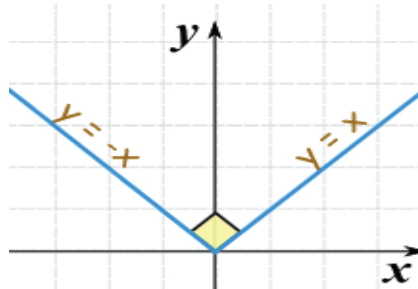
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ با ضابطه $f(x) = |x|$ را تابع قدرمطلق می‌نامیم.

بعضی از مقادیر این تابع برابر است با:

$$f(0) = |0| = 0 \quad f(-2) = |-2| = -(-2) = 2 \quad f(1) = |1| = 1$$

نمودار این تابع به شکل زیر نمایش داده می‌شود:



۷-۴-۶ تعریف: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را تابع حقیقی می‌نامیم. در توابع حقیقی تنها به ذکر ضابطه اکتفا می‌کنیم.

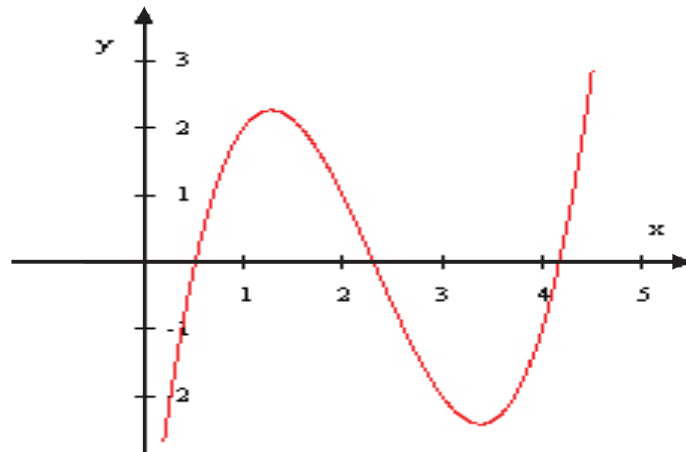
۷-۴-۷ تعریف: تابع گویا تابعی است کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای است.

۷-۴-۸ تعریف: تابع $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ که در آن a_i ها اعداد حقیقی‌اند، $a_n \neq 0$ و n نیز یک عدد صحیح مثبت است، تابع چندجمله‌ای از درجه n نامیده می‌شود.

۷-۵ تعیین دامنه و برد توابع به کمک نمودار

۷-۵-۱ تعریف: برای تعیین دامنه یک تابع از روی نمودار، کافی است تصویر نمودار را بر روی محور x ها به دست آوریم. محدوده‌ای که تصویر روی محور x ها ایجاد می‌کند دامنه تابع است. همچنین برای به دست آوردن برد یک تابع از روی نمودار، کافی است تصویر نمودار را بر روی محور y ها مشخص کنیم. محدوده‌ای که تصویر روی محور y ها ایجاد می‌کند برد تابع است.

مثال ۱۹: با توجه به شکل زیر دامنه و برد را تعیین کنید.



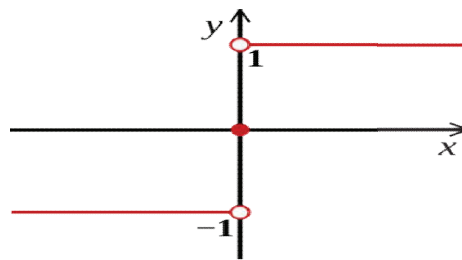
حل: برای به دست آوردن دامنه تابع کافی است، تصویر نمودار را بر روی محور x ها به دست آوریم. لذا دامنه برابر است با:

$$D_f = (0, +\infty)$$

همچنین با تصویر نمودار بر روی محور y ها مقدار برد برابر می‌شود با:

$$R_f = (-\infty, +\infty)$$

مثال ۲۰: با توجه به شکل زیر دامنه و برد را تعیین کنید.



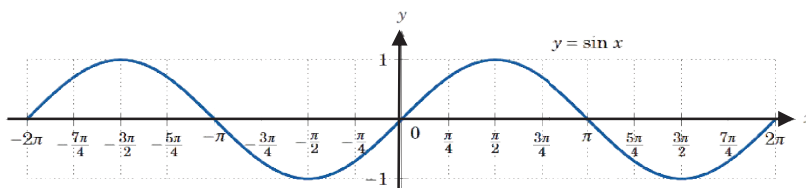
حل: برای به دست آوردن دامنه تابع کافی است تصویر نمودار را بر روی محور x ها به دست آوریم. لذا دامنه برابر است با:

$$D_f = (-\infty, +\infty)$$

همچنین با تصویر نمودار بر روی محور y ها مقدار برد برابر می‌شود با:

$$R_f = \{-1, 0, 1\}$$

مثال ۲۱: با توجه به شکل زیر دامنه و برد را تعیین کنید.



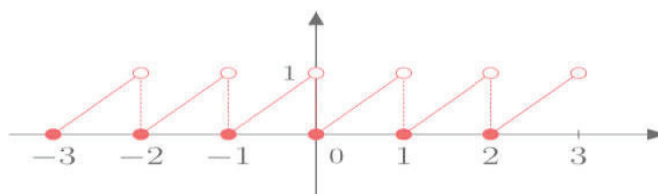
حل: برای به دست آوردن دامنه تابع کافی است، تصویر نمودار را بر روی محور x ها به دست آوریم. لذا دامنه برابر است با:

$$D_f = [-2\pi, 2\pi]$$

همچنین با تصویر نمودار بر روی محور y ها مقدار برد برابر می‌شود با:

$$R_f = [-1, 1]$$

مثال ۲۲: با توجه به شکل زیر دامنه و برد را تعیین کنید.



حل: برای به دست آوردن دامنه تابع کافی است، تصویر نمودار را بر روی محور x ها به دست آوریم. لذا دامنه برابر است با:

$$D_f = [-3, 3)$$

همچنین با تصویر نمودار بر روی محور y ها مقدار برد برابر می‌شود با:

$$R_f = [0, 1)$$

۷-۶ نکاتی در مورد تعیین دامنه توابع

۷-۶-۱ نکته: دامنه توابع چند جمله‌ای $\mathbb{R}$ یعنی مجموعه اعداد حقیقی است.

مثال ۲۳: دامنه تابع $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 1$ برابر $\mathbb{R}$ است.

۷-۶-۲ نکته: دامنه توابع گویا برابر است با $\{ \text{ریشه های مخرج} \} - \mathbb{R}$.

مثال ۲۴: دامنه تابع $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-4}$ را به دست آورید.

حل: برای به دست آوردن دامنه ابتدا مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم $x^2 - 4 = 0$ ، بنابراین $x^2 = 4$ و جواب‌های معادله $x = \pm 2$ می‌شود. لذا دامنه تابع بنا به نکته ۷-۶-۲ برابر است با $\mathbb{R} - \{2, -2\}$.

مثال ۲۵: دامنه تابع $f(x) = \frac{5x^2-4}{x^2+2}$ را به دست آورید.

حل: مخرج همواره بزرگتر از صفر است و به ازای هیچ مقدار حقیقی برابر با صفر نیست، بنابراین بنا به نکته ۷-۶-۲ دامنه برابر $\mathbb{R}$ است.

مثال ۲۶: دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+3}$ را به دست آورید.

حل: برای به دست آوردن دامنه تابع ابتدا مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم $x+3=0$ ، بنابراین جواب‌های معادله $x=-3$ می‌شود. پس بنا به نکته ۷-۶-۲ دامنه برابر است با $\mathbb{R} - \{-3\}$.

توجه نمایید اگر برای به دست آوردن دامنه تابع فوق آن را ساده کنیم، حاصل یک چندجمله‌ای می‌شود که دامنه آن برابر با $\mathbb{R}$ می‌شود و این خلاف واقع است.

$$f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+3} = \frac{(x+2)(x+3)}{x+3} = x+2$$

لذا برای به دست آوردن دامنه یک تابع نباید آن را ساده کرد.

مثال ۲۷: دامنه تابع $f(x) = \frac{7x^2 - 3x + 1}{|x + 2| - 3}$ را بیابید.

حل: برای به دست آوردن دامنه، ابتدا ریشه های مخرج را به دست می آوریم. لذا کافی است مخرج را مساوی صفر قرار دهیم. $|x + 2| - 3 = 0$ ، از این تساوی بنا به خواص قدرمطلق نتیجه می گیریم که $x + 2 = \pm 3$ و جواب های معادله $x = 1$ و $x = -5$ می شود. پس بنا به نکته ۷-۶-۲ دامنه برابر است با $\mathbb{R} - \{1, -5\}$.

مثال ۲۸: دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2 - x}{[3x] - 1}$ را تعیین کنید.

حل: برای به دست آوردن دامنه، کافی است مخرج را مساوی صفر قرار دهیم. داریم $[3x] - 1 = 0$ ، بنابراین $[3x] = 1$ و بنا به تعریف تابع جزء صحیح نتیجه می گیریم که $1 \leq 3x < 2$. لذا $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ ، پس بنا به نکته ۷-۶-۲ دامنه برابر است با $\mathbb{R} - [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

مثال ۲۹: دامنه تابع $f(x) = \frac{2x + 3}{[x] + [-x] + 1}$ را بیابید.

حل: با توجه به تعریف جزء صحیح داریم:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

لذا داریم:

$$[x] + [-x] + 1 = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین بنا به نکته ۷-۶-۲ دامنه تابع برابر است با مجموعه اعداد صحیح.

۷-۶-۳ نکته: برای تعیین دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار داده و نامعادله را حل می‌کنیم. همچنین اگر رادیکالی با فرجه زوج در مخرج کسر باشد، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر از صفر قرار می‌دهیم.

مثال ۳۰: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3-x}$ را به دست آورید.

حل: برای به دست آوردن دامنه تابع بنا به نکته ۷-۶-۳ کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار داده، لذا داریم $3-x \geq 0$ ، بنابراین $x \leq 3$ و دامنه تابع برابر است با $(-\infty, 3]$.

مثال ۳۱: دامنه تابع $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 5x + 6}$ را به دست آورید.

حل: برای به دست آوردن دامنه تابع بنا به نکته ۷-۶-۳ کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار داده $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ ، برای حل این نامعادله قرار می‌دهیم $x^2 - 5x + 6 = 0$ و با استفاده از اتحاد جمله مشترک آن را تجزیه کرده، نتیجه می‌گیریم که $(x-3)(x-2) = 0$ ، پس داریم $x = 3$ یا $x = 2$. حال از طریق تعیین علامت قسمت‌هایی را که عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر است، مشخص می‌کنیم.

x	$-\infty$	۲	۳	$+\infty$	
$x^۲-۵x+۶$	+	۰	-	۰	+

لذا با توجه به جدول تعیین علامت نتیجه می‌گیریم که:

$$D_f = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

مثال ۳۲: دامنه تابع $f(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ را بیابید.

حل: رادیکال در مخرج کسر قرار گرفته، لذا دامنه تابع برابر با مقادیری از x است که به ازای آن‌ها عبارت زیر رادیکال بزرگتر از صفر شود. عبارت زیر رادیکال را مساوی صفر قرار داده، لذا داریم $x^2 - 8x + 16 = 0$. با استفاده از اتحاد مربع آن را تجزیه کرده نتیجه می‌گیریم که $(x-4)^2 = 0$ ، پس داریم $x = 4$. حال عبارت را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$x^2 - 8x + 16$	+	۰	+

با توجه به جدول فوق نتیجه می‌گیریم که:

$$D_f = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$$

مثال ۳۳: دامنه تابع $f(x) = \frac{2}{\sqrt{|x+4|-3}}$ را به دست آورید.

حل: رادیکال در مخرج کسر قرار گرفته، بنابراین دامنه تابع بنا به نکته ۳-۶-۷ برابر با مقادیری از x است که به ازای آن‌ها عبارت زیر رادیکال بزرگتر از صفر شود. پس داریم $|x+4|-3 > 0$. پس $|x+4| > 3$. لذا بنا به خواص قدر مطلق نتیجه می‌گیریم که $x+4 > 3$ یا $x+4 < -3$. لذا $x > -1$ یا $x < -7$. پس داریم:

$$D_f = (-\infty, -7) \cup (-1, +\infty)$$

۴-۶-۷ نکته: برای پیدا کردن دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد، کافی است رادیکال را نادیده گرفته و دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست آوریم.

مثال ۳۴: دامنه تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^5 - 3x^2 + 2}$ را تعیین کنید.

حل: فرجه رادیکال فرد است، لذا بنا به نکته ۷-۶-۴ کافی است رادیکال را نادیده بگیریم و دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست آوریم. عبارت $x^5 - 3x^2 + 2$ چندجمله ای است پس دامنه برابر $\mathbb{R}$ است.

مثال ۳۵: دامنه تابع $f(x) = \sqrt[5]{\frac{x^3 - 2x + 12}{x^2 - 4x + 4}}$ را تعیین کنید.

حل: فرجه رادیکال فرد است، لذا بنا به نکته ۷-۶-۴ کافی است رادیکال را نادیده بگیریم و دامنه عبارت گویا زیر رادیکال را به دست آوریم. مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم $x^2 - 4x + 4 = 0$ ، بنابراین $(x-2)^2 = 0$ و جواب معادله $x = 2$ می‌شود. لذا دامنه برابر است با $\mathbb{R} - \{2\}$.

مثال ۳۶: دامنه تابع $f(x) = \sqrt[7]{\frac{2x+1}{[x]+4}}$ را بیابید.

حل: فرجه رادیکال فرد است، لذا کافی است رادیکال را نادیده بگیریم و دامنه عبارت $\frac{2x+1}{[x]+4}$ را پیدا کنیم. مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم $[x]+4=0$ ، لذا $[x] = -4$ و بنا به خواص تابع جزء صحیح نتیجه می‌شود که $-4 \leq x < -3$. تابع زیر رادیکال گویا است؛ لذا دامنه برابر است با $\mathbb{R} - [-4, 3)$.

مثال ۳۷: دامنه تابع $f(x) = \sqrt[3]{\frac{5x+2}{|x|-6}}$ را بیابید.

حل: فرجه رادیکال فرد است، لذا بنا به نکته ۷-۶-۴ کافی است رادیکال را نادیده بگیریم و دامنه عبارت $\frac{5x+2}{|x|-6}$ را پیدا کنیم. مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم $|x|-6=0$ ، بنابراین $|x|=6$ و بنا به خواص تابع قدرمطلق نتیجه می‌شود که $x = \pm 6$. لذا دامنه برابر است با $\mathbb{R} - \{-6, 6\}$.

تمرین

دامنه توابع زیر را به دست آورید.

$$۱) f(x) = -2x^7 + 4x - 5$$

$$۲) f(x) = x^4 - 3x^2 + x^2 + 5$$

$$۳) f(x) = \frac{x^2 + 2x}{4x^2 - 16}$$

$$۴) f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 + 5x + 6}$$

$$۵) f(x) = \frac{2x^2 + 4x}{|[x]| - 2}$$

$$۶) f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + x}$$

$$۷) f(x) = \frac{x^2 + 2x}{|x| + 2x}$$

$$۸) f(x) = \frac{x^2 - 5}{|x| - x}$$

$$۹) f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$$

$$۱۰) f(x) = \sqrt[4]{7x - 6}$$

$$۱۱) f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$$

$$۱۲) f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 7x + 12}$$

$$۱۳) f(x) = \sqrt[5]{16 + x^2}$$

$$۱۴) f(x) = \sqrt[6]{9 - x^2}$$

$$۱۵) f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 25}}$$

$$۱۶) f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x - 4}{x^2 - x - 12}}$$

$$۱۷) f(x) = \frac{3}{4 - \sqrt{x - 4}}$$

$$۱۸) f(x) = \frac{3x^5 + 7x - 3}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$$۱۹) f(x) = \sqrt{x + |x|}$$

$$۲۰) f(x) = \sqrt[4]{-x^2 + 9}$$

$$۲۱) f(x) = \frac{2x + 3}{\sqrt{|x| - x}}$$

$$۲۲) f(x) = \frac{2}{\sqrt{x + |x|}}$$

$$۲۳) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$۲۴) f(x) = \sqrt[5]{\frac{2}{|x| - 5}}$$

۷-۷ رسم توابع به کمک انتقال

۷-۷-۱ تعریف: فرض کنید نمودار تابع $f(x)$ داده شده و a یک عدد مثبت باشد، در این صورت داریم:

(۱) برای رسم نمودار تابع $f(x+a)$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را a واحد به موازات محور x ها به سمت چپ منتقل شود.

(۲) برای رسم نمودار تابع $f(x-a)$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را a واحد به موازات محور x ها به سمت راست منتقل شود.

(۳) برای رسم نمودار تابع $f(x)+b$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را b واحد به سمت بالا منتقل کرد.

(۴) برای رسم نمودار تابع $f(x)-b$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را b واحد به سمت پایین منتقل کرد.

(۵) برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

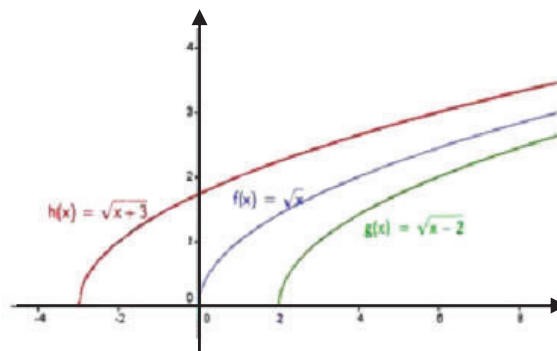
(۶) برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ ، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

(۷) برای رسم نمودار تابع $|f(x)|$ ، کافی است قسمت‌هایی از نمودار تابع $f(x)$ را که پایین محور x ها است نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

(۸) برای رسم نمودار تابع $|f(x)|$ ، باید قسمت x های منفی از نمودار تابع $f(x)$ را حذف کرده و نمودار تابع برای x های منفی دقیقاً مشابه x های مثبت رسم شود.

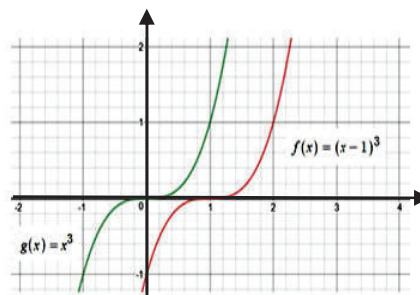
مثال ۳۸: با توجه به نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار تابع $h(x) = \sqrt{x+3}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ را به کمک انتقال رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار تابع $h(x) = \sqrt{x+3}$ ، نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ۳ واحد به موازات محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم و برای رسم نمودار تابع $g(x) = \sqrt{x-2}$ ، باید نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ۲ واحد به موازات محور x ها به سمت راست منتقل کرد.



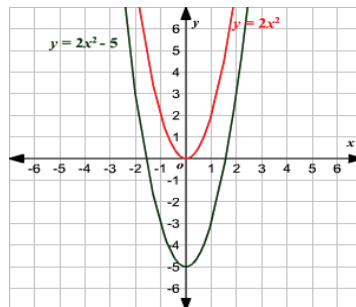
مثال ۳۹: با توجه به نمودار تابع $g(x) = x^3$ ، نمودار تابع $f(x) = (x-1)^3$ را به کمک انتقال رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار تابع $f(x) = (x-1)^3$ ، باید نمودار تابع $g(x) = x^3$ را یک واحد به موازات محور x ها به سمت راست منتقل کرد.



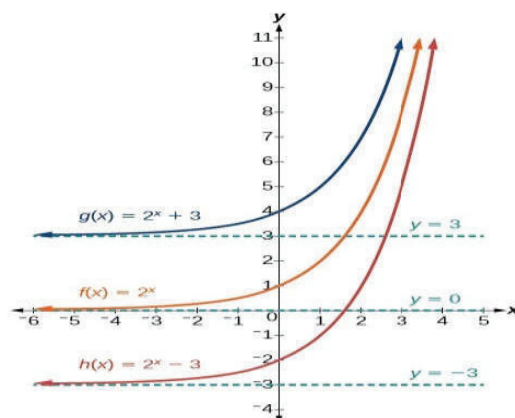
مثال ۴۰: با توجه به نمودار تابع $f(x) = 2x^2$ ، نمودار تابع $f(x) = 2x^2 - 5$ را به کمک انتقال رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار تابع $f(x) = 2x^2 - 5$ ، باید نمودار تابع $f(x) = 2x^2$ را ۵ واحد به سمت پایین منتقل کرد.



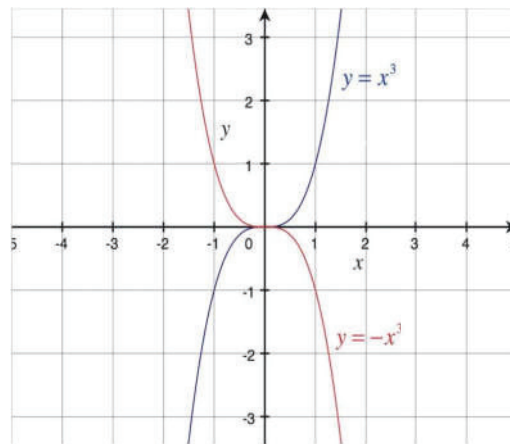
مثال ۴۱: با توجه به نمودار تابع $f(x) = 2^x$ ، نمودار تابع $g(x) = 2^x + 3$ و $h(x) = 2^x - 3$ به کمک انتقال رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار تابع $g(x) = 2^x + 3$ ، باید نمودار تابع $f(x) = 2^x$ را ۳ واحد به سمت بالا منتقل کرد و برای رسم نمودار تابع $h(x) = 2^x - 3$ ، کافی است نمودار تابع $f(x) = 2^x$ را ۳ واحد به سمت پایین منتقل کرد.



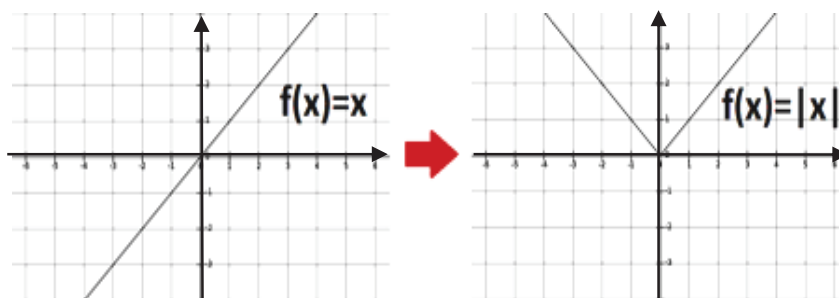
مثال ۴۲: با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^3$ نمودار تابع $f(x) = -x^3$ را به کمک انتقال رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار تابع $f(x) = -x^3$ ، کافی است نمودار تابع $f(x) = x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



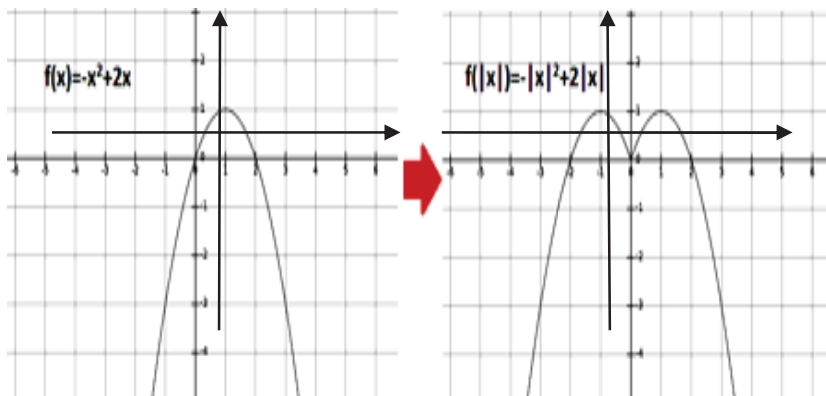
مثال ۴۳: با توجه به نمودار تابع $f(x) = x$ ، نمودار تابع $f(x) = |x|$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار $f(x) = |x|$ ، باید قسمتهایی از نمودار $f(x) = x$ را که پایین محور x ها است نسبت به محور x ها قرینه کرده و بالا ببریم.



مثال ۴۴: با توجه به نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ و به کمک انتقال نمودار تابع $f(x) = -|x|^2 + 2|x|$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار $f(x) = -|x|^2 + 2|x|$ کافی است قسمت‌های منفی از نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ را حذف، و نمودار تابع $f(|x|)$ برای x های منفی دقیقاً مشابه x های مثبت رسم خواهد شد.



تمرین

با توجه به نمودار تابع $f(x) = x^2 + 5x$ نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

۱) $f(x) = (x + 3)^2 + 5(x + 3)$

$f(x) = (x - 4)^2 + 5(x - 4)$

۳) $f(x) = x^2 + 5x + 4$

۴) $f(x) = |x|^2 + 5|x|$

۵) $f(x) = |x|^2 + 5x|$

۷-۸ تابع زوج و فرد

۷-۸-۱ تعریف: تابع f را زوج گوییم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱- دامنه f متقارن باشد. یعنی به ازای هر x متعلق به دامنه f ، $-x$ هم متعلق به دامنه f باشد.

۲- به ازای هر x متعلق به دامنه f داشته باشیم: $f(-x) = f(x)$.

۷-۸-۲ تعریف: تابع f را فرد گوییم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱- دامنه f متقارن باشد. یعنی به ازای هر x متعلق به دامنه f ، $-x$ هم متعلق به دامنه f باشد.

۲- به ازای هر x متعلق به دامنه f ، داشته باشیم: $f(-x) = -f(x)$.

مثال ۴۵: زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = x^4 + 2x^2 - 2|x|$ را بررسی کنید.

حل: داریم: $D_f = \mathbb{R}$. بنابراین به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، نتیجه می گیریم که $-x \in \mathbb{R}$ به علاوه،

$$f(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^2 - 2|-x| = x^4 + 2x^2 - 2|x| = f(x)$$

لذا f تابعی زوج است.

مثال ۴۶: زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = 2x^5 - x^3 + 2x$ را بررسی کنید.

حل: $D_f = \mathbb{R}$. لذا به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، قرینه آن نیز متعلق به $\mathbb{R}$ است. همچنین:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^5 - (-x)^3 + 2(-x) = -2x^5 + x^3 - 2x \\ &= -(2x^5 - x^3 + 2x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

پس f تابعی فرد است.

مثال ۴۷: زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \frac{(x^3 - 4x)^5}{x^2 - 1}$ را بررسی کنید.

حل: داریم: $D_f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$. بنابراین به ازای هر $x \in D_f$ ، قرینه آن نیز متعلق به D_f است. همچنین:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{((-x)^3 - 4(-x))^5}{(-x)^2 - 1} = \frac{(-x^3 + 4x)^5}{x^2 - 1} = \frac{(-(x^3 - 4x))^5}{x^2 - 1} \\ &= -\frac{(x^3 - 4x)^5}{x^2 - 1} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

لذا f تابعی فرد است.

مثال ۴۸: زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = |x|(x^5 + 4x)^3(x^4 - 4x^2 + 7)$ را بررسی کنید.

حل: داریم: $D_f = \mathbb{R}$. بنابراین به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، قرینه آن نیز متعلق به $\mathbb{R}$ است.

$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x|((-x)^5 + 4(-x))^3((-x)^4 - 4(-x)^2 + 7) \\ &= |x|(-x^5 - 4x)^3(x^4 - 4x^2 + 7) \\ &= -|x|(x^5 + 4x)^3(x^4 - 4x^2 + 7) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

پس f تابعی فرد است.

۷-۸-۱ نکته: توابعی که یکی از شرایط زوج یا فرد بودن را نداشته باشند، نه زوج و نه فرد می‌نامیم.

مثال ۴۹: زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2 + 8x + 12}$ را بررسی کنید.

حل: ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن دامنه تابع کافی است مخرج را مساوی صفر قرار دهیم $x^2 + 8x + 12 = 0$. با توجه به اتحاد جمله مشترک داریم $(x+6)(x+2) = 0$ ، در نتیجه $x = -6$ یا $x = -2$ جواب‌های معادله می‌شود. تابع عبارت گویا است؛ بنابراین دامنه آن برابر است با: $\mathbb{R} - \{-2, -6\}$.

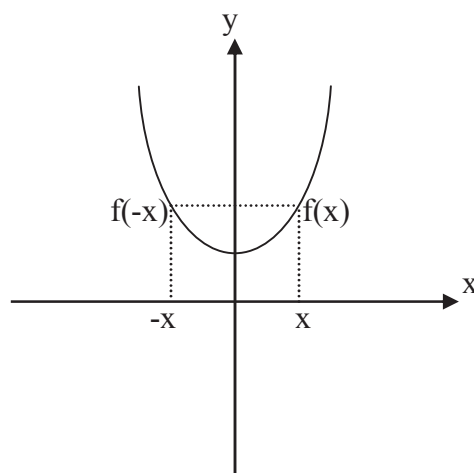
همان طور که می‌بینید اعداد ۲ و ۶ متعلق به دامنه تابع هستند ولی قرینه این اعداد یعنی ۲- و ۶- در دامنه تابع موجود نمی‌باشند. بنابراین تابع نه زوج و نه فرد است.

۷-۸-۲ نکته: تنها تابعی که هم زوج و هم فرد می‌باشد تابع ثابت $f(x) = 0$ است.

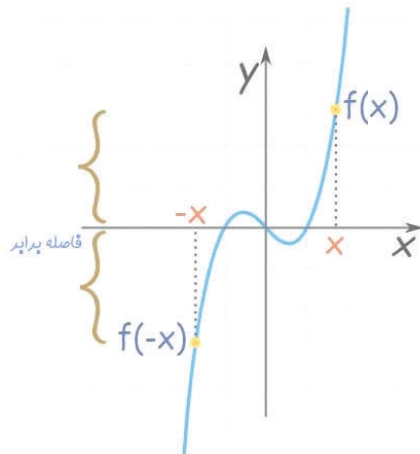
۷-۸-۳ نکته: نمودار تابع زوج نسبت به محور y ها متقارن است.

۷-۸-۴ نکته: نمودار تابع فرد نسبت به مبدا مختصات متقارن است.

مثال ۵۰: نمودار شکل زیر نمایش یک تابع زوج است؛ زیرا نسبت به محور y ها متقارن است؛ به عبارت دیگر به ازای هر x متعلق به دامنه داریم $f(-x) = f(x)$.



مثال ۵۱: نمودار شکل زیر نمایش یک تابع فرد است، زیرا نسبت به مبدأ متقارن است؛ به عبارت دیگر به ازای هر x متعلق به دامنه داریم $f(-x) = -f(x)$.



تمرین

زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

$$۱) f(x) = ۷x^۴ + ۴x^۶ - |x| + ۳$$

$$۲) f(x) = ۴$$

$$۳) f(x) = (۳x^۴ + ۲)(x^۵ + ۳x)^۳$$

$$۴) f(x) = x^۳ + ۲x^۵ - ۳x$$

$$۵) f(x) = \sqrt{x^۲ + ۴}$$

$$۶) f(x) = ۲x^۲ + x$$

$$۷) f(x) = |x|(x^۲ + ۲)$$

$$۸) f(x) = |x - ۲|$$

$$۹) f(x) = |۲x + ۳| + |۲x - ۳|$$

$$۱۰) f(x) = \sqrt[۳]{x^۲ + ۲x}$$

$$۱۱) f(x) = \frac{x^۲ + ۳x}{x^۲ + ۴}$$

$$۱۲) f(x) = \frac{[x] + [-x]}{x^۲ + ۳}$$

$$۱۳) f(x) = -۲x^۲ + ۴, \quad -۳ \leq x < ۷$$

۷-۹ تابع یک به یک

۷-۹-۱ تعریف: تابع $f: A \rightarrow B$ با ضابطه $y = f(x)$ یک به یک است، هرگاه هر عضو برد فقط و فقط با یک عضو از دامنه متناظر باشد. به عبارت دیگر f تابعی یک به یک است هرگاه به ازای هر a و b متعلق به دامنه f ، اگر $f(a) = f(b)$ آنگاه $a = b$.

مثال ۵۲: تابع $f = \{(1, 3), (-3, 4), (2, 6), (5, 6)\}$ یک به یک نمی باشد؛ زیرا $f(2) = f(5) = 6$ در حالی که $2 \neq 5$.

مثال ۵۳: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^3 + 2$ یک به یک است؛ زیرا به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ ، از برابری $f(a) = f(b)$ داریم $a^3 + 2 = b^3 + 2$. در نتیجه $a^3 = b^3$. از طرفین تساوی ریشه سوم گرفته داریم $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{b^3}$. لذا $a = b$.

مثال ۵۴: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = 4x^2 - 7$ یک به یک نیست؛ زیرا به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ ، از برابری $f(a) = f(b)$ داریم $4a^2 - 7 = 4b^2 - 7$. لذا $4a^2 = 4b^2$. با تقسیم طرفین تساوی بر عدد ۴ داریم $a^2 = b^2$. از طرفین تساوی ریشه دوم گرفته نتیجه می گیریم که $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$. لذا $a = \pm b$ و این متناقض با تعریف یک به یک بودن تابع است.

مثال ۵۵: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \sqrt[5]{3x^5} - 6$ یک به یک است؛ زیرا به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ ، از برابری $f(a) = f(b)$ داریم $\sqrt[5]{3a^5} - 6 = \sqrt[5]{3b^5} - 6$. طرفین این رابطه را به توان ۵ می رسانیم. داریم: $3a^5 - 6 = 3b^5 - 6$. در نتیجه $3a^5 = 3b^5$. با تقسیم طرفین تساوی بر عدد ۳ نتیجه می شود $a^5 = b^5$. از طرفین تساوی ریشه پنجم گرفته، داریم $\sqrt[5]{a^5} = \sqrt[5]{b^5}$. بنابراین $a = b$ و تابع یک به یک می شود.

مثال ۵۶: یک‌به‌یک بودن تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \frac{x+5}{3x-2}$ را بررسی کنید.

حل: طبق تعریف تابع یک‌به‌یک به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ ، از برابری $f(a) = f(b)$ نتیجه می‌گیریم که: $\frac{a+5}{3a-2} = \frac{b+5}{3b-2}$ ، این رابطه را طرفین وسطین کرده داریم:

$$3ab - 2a + 15b - 10 = 3ab - 2b + 15a - 10$$

$$17a = 17b$$

$$a = b$$

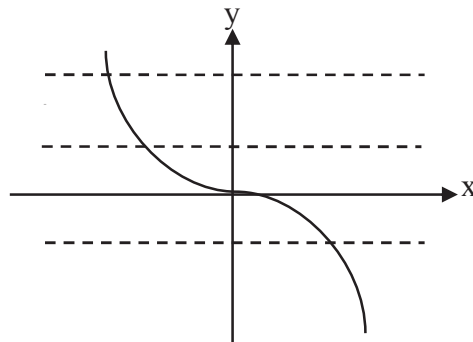
بنابراین تابع یک‌به‌یک است.

مثال ۵۷: آیا تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = 3|x+1|$ یک‌به‌یک است؟

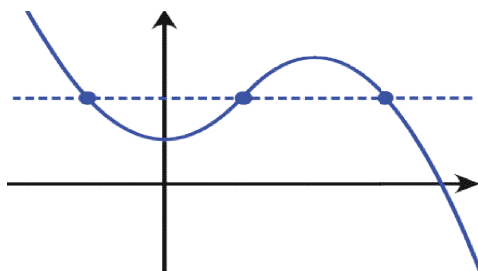
حل: خیر؛ زیرا اگر $f(a) = f(b)$ باشد، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که $3|a+1| = 3|b+1|$. با توجه به خواص قدرمطلق داریم $a+1 = \pm(b+1)$. لذا داریم $a = b$ یا $a = -b-2$ و این متناقض با تعریف تابع یک‌به‌یک است.

۷-۹-۱ نکته: نموداری نمایش تابع یک‌به‌یک است که هر خط موازی با محور x ها آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال ۵۸: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که نمودار آن به صورت زیر می‌باشد یک‌به‌یک است؛ زیرا هر خط موازی محور x ها آن را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.



مثال ۵۹: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که نمودار آن به صورت زیر است یک به یک نیست؛ زیرا خطی موازی محور x ها می توان رسم کرد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند.



تمرین

یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x) = x^2 - 5$

۲) $f(x) = |x| + 2$

۳) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 9$

۴) $f(x) = 1 + \frac{3}{x}$

۵) $f(x) = 2x |x|$

۶) $f(x) = x^2 - 7$

۷) $f(x) = \sqrt[5]{2x^3 - 4}$

۸) $f(x) = 3x^5 - 4$

۹) $f(x) = |5x - 4|$

۱۰) $f(x) = \sqrt[3]{5x^2 - 6}$

۱۱) $f(x) = \frac{4x^3 - 1}{2x^3 + 8}$

۱۲) $f(x) = \frac{5x - 4}{2x + 7}$

۱۳) $f(x) = \frac{6x^2 - 3}{x^2 + 1}$

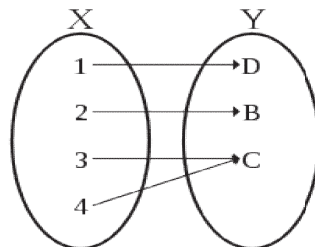
۱۴) $f(x) = \frac{4x^5 - 3}{8x^5 + 6}$

۷-۱۰ تابع پوششی (پوشا)

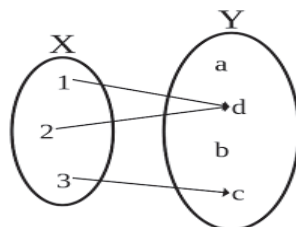
۷-۱۰-۱ تعریف: تابع $f: A \rightarrow B$ پوششی است، هرگاه هم‌دامنه و برد آن مساوی باشد. به عبارت دیگر، به ازای هر $y \in B$ عضوی مانند $x \in A$ وجود داشته باشد به طوری که $y = f(x)$. به عبارت دیگر تابع $f: A \rightarrow B$ پوششی است هرگاه برد f مساوی مجموعه B باشد.

۷-۱۰-۲ تعریف: از نظر نمودار پیکانی تابع $f: A \rightarrow B$ پوششی است، هرگاه برای تمام اعضای مجموعه B پیکان‌های ورودی داشته باشیم.

مثال ۶۰: نمودار زیر نمایش دهنده یک تابع پوشا است؛ زیرا برای تمام اعضای مجموعه Y پیکان‌های ورودی داریم.



مثال ۶۱: نمودار زیر نمایش دهنده تابعی است که پوشا نیست؛ چون در مجموعه دوم عضوی مانند b داریم که هیچ پیکانی به آن وارد نشده است.



مثال ۶۲: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که با ضابطه $f(x) = x + 6$ تعریف شده یک تابع پوششی است؛ زیرا به ازای هر $y \in \mathbb{R}$ ، عضوی مانند $x = y - 6$ وجود دارد به طوری که $f(x) = y$.

مثال ۶۳: تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ که با ضابطه $f(x) = x + 6$ تعریف شده یک تابع پوششی نیست؛ زیرا اگر $y = 6 \in \mathbb{N}$ اختیار شود آن گاه رابطه $x + 6 = 6$ به ازای $x = 0$ برقرار است که $0 \notin \mathbb{N} = D_f$.

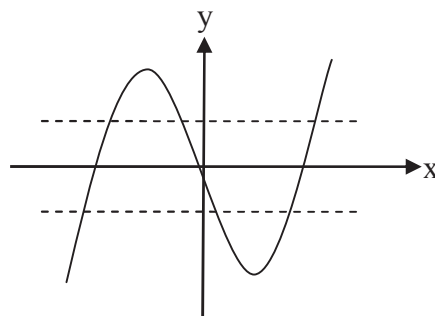
مثال ۶۴: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^2$ پوشا نیست، زیرا $y = -1$ از

اعضای مجموعه انجام $\mathbb{R}$ تصویر هیچ عضوی از دامنه‌ی تابع نیست. به عبارت دیگر عدد حقیقی مانند $x \in \mathbb{R}$ وجود ندارد به طوری که $x^2 = -1$.

مثال ۶۵: تابع $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^3$ پوشا نیست، زیرا $y = -1$ از اعضای مجموعه‌ی انجام $\mathbb{R}$ تصویر هیچ عضوی از دامنه‌ی تابع نیست. به عبارت دیگر عدد حقیقی مانند $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ وجود ندارد به طوری که $x^3 = -1$.

۷-۱۰-۱ نکته: نموداری نمایش تابع پوششی است که هر خط موازی محور x ها در محدوده هم دامنه تابع، آن را حداقل در یک نقطه قطع کند.

مثال ۶۶: از نظر نموداری تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پوششی است؛ زیرا هر خط موازی محور x ها آن را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.



تمرین

(۱) پوششی بودن تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را که با ضابطه $f(x) = x^3 + 3$ تعریف شده است را بررسی کنید.

(۲) پوششی بودن تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که با ضابطه $f(x) = 2x + 1$ تعریف شده است را بررسی کنید.

(۳) پوششی بودن تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ که با ضابطه $f(x) = x^2$ تعریف شده است را بررسی کنید.

(۴) پوششی بودن تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را که با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ تعریف شده است را بررسی کنید.

(۵) تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که با ضابطه $f(x) = |x|$ تعریف شده است را در نظر گرفته، نشان دهید تابع f تابعی پوششی نمی‌باشد.

۷-۱۱ اعمال روی توابع (جبر توابع)

۷-۱۱-۱ تعریف: اگر f و g دو تابع باشند، آن‌گاه چهار عمل اصلی (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) را بدین شکل تعریف می‌کنیم:

به ازای هر $x \in D_{f+g}$ ، $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ ، $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ؛

به ازای هر $x \in D_{f-g}$ ، $D_{f-g} = D_f \cap D_g$ ، $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ ؛

به ازای هر $x \in D_{f \times g}$ ، $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$ ، $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ ؛

به ازای هر $x \in D_{\frac{f}{g}}$ ، $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$ ، $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ؛

مثال ۶۷: اگر $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x-2}}$ ، دامنه توابع f ، g ، $\frac{f}{g}$ ، $f+g$ و $f \times g$ را به دست آورده و حاصل اعمال جبری را بنویسید.

حل: دامنه تابع f برابر با $\mathbb{R}$ و دامنه تابع g برابر با $(2, +\infty)$ است. بنابراین دامنه توابع $f+g$ ، $f-g$ و $f \times g$ برابر است با:

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap (2, +\infty) = (2, +\infty)$$

با توجه به این نکته که مخرج یک کسر نمی‌تواند صفر شود، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ برابر

است با:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid \frac{x-4}{\sqrt{x-2}} = 0\} = (2, +\infty) - \{4\} = (2, 4) \cup (4, +\infty)$$

لذا با توجه به تعریف ۷-۱۱-۱ داریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x+3) + \frac{x-4}{\sqrt{x-2}}$$

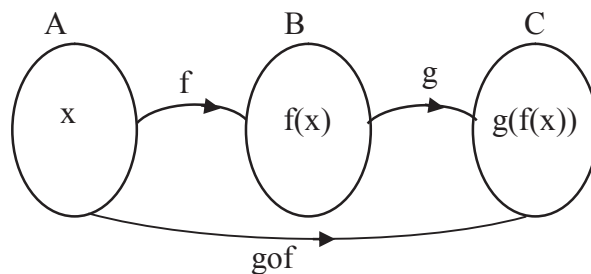
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x+3) - \frac{x-4}{\sqrt{x-2}}$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (2x+3) \times \frac{x-4}{\sqrt{x-2}} = \frac{(2x+3)(x-4)}{\sqrt{x-2}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+3}{\frac{x-4}{\sqrt{x-2}}} = \frac{(2x+3)\sqrt{x-2}}{x-4}$$

۷-۱۲ ترکیب توابع

۷-۱۲-۱ تعریف: فرض کنیم $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ دو تابع باشند. اگر $f(x) \in D_g$ ، در این صورت تابع g می‌تواند بر خروجی تابع f یعنی $f(x)$ عمل کند. پس می‌توان تابع $h: A \rightarrow C$ را با ضابطه $h(x) = g(f(x))$ تعریف نمود. تابع h را ترکیب f و g نامیده، با نماد $g \circ f$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$


با توجه به تعریف ترکیب توابع، دامنه ترکیب دو تابع به صورت زیر است:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

توجه داشته باشید که دامنه تابع $f \circ g$ مجموعه آن x هایی از دامنه تابع g است که $g(x)$ متناظر آن‌ها متعلق به دامنه تابع f باشد؛ لذا داریم $D_{f \circ g} \subseteq D_g$. به

همین ترتیب $D_{g \circ f} \subseteq D_f$.

مثال ۶۸: توابع $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = 2-x$ را در نظر گرفته، ضابطه توابع مرکب $g \circ f$ و $f \circ g$ را با تعیین دامنه آن‌ها مشخص کنید.

حل: دامنه تابع $g \circ f$ عبارت است از:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [3, +\infty) \mid \sqrt{x-3} \in \mathbb{R}\} = [3, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-3}) = 2 - \sqrt{x-3}$$

دامنه تابع $g \circ g$ عبارت است از:

$$D_{g \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(2 - x) = 2 - (2 - x) = x$$

مثال ۶۹: توابع $f(x) = \frac{2}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$ را در نظر گرفته، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به این که همواره $g(x) \neq 0$ ، دامنه تابع $f \circ g$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \mid \frac{1}{1-x^2} \in \mathbb{R} - \{0\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \mid \frac{1}{1-x^2} \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{\pm 1\} \end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{1-x^2}} = 2(1-x^2)$$

دامنه تابع $g \circ f$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{2}{x} \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}\} \\ &= \{x \neq 0 \mid \frac{2}{x} \neq \pm 1\} \\ &= \{x \neq 0 \mid x \neq \pm 2\} \\ &= \mathbb{R} - \{-2, 2, 0\} \end{aligned}$$

ضابطه تابع $g \circ f$ برابر است با:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{x^2-4}$$

تمرین

برای توابع f و g در هریک از موارد زیر دامنه توابع $f+g$ ، $\frac{f}{g}$ ، fog و gof را مشخص کرده و ضابطه آن‌ها را به دست آورید.

$$۱) f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2$$

$$۲) f(x) = \sqrt{x+4}, \quad g(x) = x^2 - 4$$

$$۳) f(x) = \frac{x}{x-2}, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$۴) f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$۵) f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$۶) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$۷) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \sqrt{2-x}$$

$$۸) f(x) = x+1, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

۷-۱۳ تساوی دو تابع

۷-۱۳-۱ تعریف: دو تابع f و g را مساوی گوییم هرگاه:

۱- دامنه دو تابع برابر باشند.

۲- به ازای هر $x \in D_f = D_g$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$.

مثال ۷۰: تساوی دو تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$ و $g(x) = x + 1$ را بررسی کنید.

حل: دو تابع با هم مساویند. زیرا مخرج تابع f همواره مثبت است، بنابراین $D_f = D_g = \mathbb{R}$. شرط دوم نیز برقرار است؛ زیرا به ازای هر $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = x + 1 = g(x)$$

مثال ۷۱: تساوی دو تابع $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ را بررسی کنید.

حل: تابع f حاصل ضرب دو تابع $f_1(x) = \sqrt{x}$ و $f_2(x) = \sqrt{x-1}$ است. بنابراین دامنه‌ی آن برابر است با اشتراک دامنه دو تابع f_1 و f_2 است.

$$D_{f_1} : x \geq 0 \quad \text{و} \quad D_{f_2} : x \geq 1$$

لذا دامنه‌ی تابع f برابر است با:

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = [0, +\infty) \cap [1, +\infty) = [1, +\infty)$$

برای به دست آوردن دامنه تابع g کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار داده $x^2 - x \geq 0$ ، برای حل این نامعادله قرار می‌دهیم $x^2 - x = 0$ و با استفاده از فاکتورگیری نتیجه می‌گیریم که $x(x-1) = 0$ ، پس داریم $x = 0$ یا $x = 1$. حال از طریق تعیین علامت قسمت‌هایی را که عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر است، مشخص می‌کنیم.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		+	+	-	+	+	

$$D_g = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

دامنه دو تابع با هم برابر نیستند؛ لذا دو تابع با هم برابر نمی‌باشند.

مثال ۷۲: دو تابع $f(x) = ۲$ و $g(x) = \frac{۲x}{x}$ با هم مساوی نمی باشند؛ زیرا $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{۰\}$ ، بنابراین دو تابع با هم مساوی نیستند.

تمرین

بررسی کنید که آیا توابع f و g با هم برابر هستند؟

$$۱) f(x) = |x|, \quad g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$۲) f(x) = \sqrt[۴]{x^5}, \quad g(x) = \sqrt{x} \sqrt[4]{x}$$

$$۳) f(x) = \frac{x^2 - ۹}{x - ۳}, \quad g(x) = x + ۳$$

$$۴) f(x) = \sqrt{\frac{۲x^2 - ۳}{x + ۱}}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{۲x^2 - ۳}}{x + ۱}$$

$$۵) f(x) = \frac{۲x}{|x|}, \quad g(x) = \frac{|۲x|}{x}$$

$$۶) f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x - ۳}, \quad g(x) = \sqrt{x(x - ۳)}$$

$$۷) f(x) = \frac{x^4 - ۲۵}{x^2 + ۵}, \quad g(x) = x^2 - ۵$$

$$۸) f(x) = \left[\frac{x^2}{x^2 + ۱} \right], \quad g(x) = ۰$$

$$۹) f(x) = \frac{۳x^2 + ۳}{x^2 + ۱}, \quad g(x) = ۳$$

$$۱۰) f(x) = \frac{x^2 - ۲x}{x^2 - ۴}, \quad g(x) = \frac{x^4 - ۲x^2}{x^2 - ۴x}$$

۷-۱۴ تابع معکوس

۷-۱۴-۱ تعریف: تابع $f: A \rightarrow B$ را در نظر گرفته و آن را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

حال رابطه معکوس f را با f^{-1} نمایش داده و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid y = f(x)\}$$

به عبارت دیگر معکوس یا وارون تابع f رابطه‌ای است که از جابه‌جا کردن مؤلفه‌های اول و دوم همه زوج مرتب‌های f به دست می‌آید.

۷-۱۴-۱ نکته: دامنه و برد تابع f^{-1} به ترتیب با برد و دامنه‌ی تابع f برابر است.

مثال ۷۳: معکوس تابع $f = \{(1, 2), (-3, 4), (5, 7), (6, 8)\}$ به صورت $f^{-1} = \{(2, 1), (4, -3), (7, 5), (8, 6)\}$ است که یک تابع نیز می‌باشد.

مثال ۷۴: معکوس تابع $g = \{(2, 4), (-2, 3), (1, 7), (5, 7)\}$ به صورت $g^{-1} = \{(4, 2), (3, -2), (7, 1), (7, 5)\}$ است که تابع نمی‌باشد. زیرا دو زوج مرتب متمایز $(5, 7)$ و $(1, 7)$ مؤلفه‌های دوم یکسانی دارند و وقتی جای مؤلفه‌های این دو زوج مرتب را تعویض می‌کنیم به دو زوج مرتب $(7, 5)$ و $(7, 1)$ با مؤلفه‌های اول یکسان تبدیل می‌شود و شرط تابع بودن به دلیل یک‌به‌یک نبودن تابع g نقض می‌گردد. لذا نتیجه می‌گیریم که اگر رابطه‌ای تابع باشد، وارون آن الزاماً یک تابع نمی‌باشد.

۷-۱۴-۲ تعریف: تابع f را معکوس‌پذیر می‌نامیم هرگاه معکوس تابع f خود یک تابع باشد.

۷-۱۴-۲ نکته: تابع f در دامنه‌اش معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر یک‌به‌یک باشد.

مثال ۷۵: ثابت کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = x^3 - 3$ در دامنه‌اش معکوس‌پذیر است و معکوس آن را به دست آورید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم تابع یک به یک است. از برابری $f(a) = f(b)$ داریم:
 $a^3 - 3 = b^3 - 3$ در نتیجه $a^3 = b^3$. از طرفین تساوی ریشه سوم گرفته داریم
 $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{b^3}$. لذا نتیجه می‌گیریم که $a = b$. حال معکوس تابع $y = x^3 - 3$ را به دست می‌آوریم. کافی است x را بر حسب y به دست آوریم.

$$y + 3 = x^3$$

$$\sqrt[3]{y + 3} = x = f^{-1}(y)$$

با تغییر نام X به y و y به X به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x + 3}$$

مثال ۷۶: ثابت کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \sqrt[5]{2x^5 + 4}$ در دامنه‌اش معکوس‌پذیر است و معکوس آن را به دست آورید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم تابع یک‌به‌یک است. از برابری $f(a) = f(b)$ نتیجه می‌گیریم که $\sqrt[5]{2a^5 + 4} = \sqrt[5]{2b^5 + 4}$. طرفین این رابطه را به ۵ رسانده داریم:
 $2a^5 + 4 = 2b^5 + 4$ در نتیجه $2a^5 = 2b^5$. با تقسیم طرفین تساوی بر عدد ۲ نتیجه می‌شود $a^5 = b^5$. از طرفین تساوی ریشه هفتم گرفته داریم $\sqrt[5]{a^5} = \sqrt[5]{b^5}$. بنابراین $a = b$ و تابع یک‌به‌یک می‌شود. حال معکوس تابع را به دست می‌آوریم. ابتدا طرفین تساوی را به توان فرجه رادیکال یعنی ۵ می‌رسانیم. بنابراین داریم
 $y^5 = 2x^5 + 4$ حال x را بر حسب y به دست می‌آوریم.

$$2x^y = y^5 - 4$$

$$x^y = \frac{y^5 - 4}{2}$$

$$x = \sqrt[y]{\frac{y^5 - 4}{2}} = f^{-1}(y)$$

با تغییر نام X به y و y به X به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = y = \sqrt[y]{\frac{x^5 - 4}{2}}$$

مثال ۷۷: معکوس تابع $y = 3x\sqrt{x} + 2$ را با فرض $x > 0$ بیابید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم تابع یک‌به‌یک است. طبق تعریف تابع یک‌به‌یک از برابری

$$f(a) = f(b) \quad \text{داریم} \quad 3a\sqrt{a} + 2 = 3b\sqrt{b} + 2 \quad \text{لذا} \quad 3a\sqrt{a} = 3b\sqrt{b}$$

طرفین این رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم. نتیجه می‌گیریم که $|a|^3 = |b|^3$

پس $a^3 = b^3$. با تقسیم طرفین تساوی بر عدد ۹ داریم $a^3 = b^3$. از طرفین

تساوی ریشه سوم گرفته نتیجه می‌شود که $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{b^3}$. بنابراین $a = b$ و تابع

یک‌به‌یک می‌شود. حال معکوس تابع $y = 3x\sqrt{x} + 2$ را به دست می‌آوریم.

$$y - 2 = 3x\sqrt{x}$$

$$(y - 2)^3 = 9x^3$$

$$\frac{(y - 2)^3}{9} = x^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{(y - 2)^3}{9}} = \sqrt[3]{9x^3} = x$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{(y - 2)^3}{9}} = f^{-1}(y)$$

با تغییر نام X به Y و Y به X به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{9}}$$

مثال ۷۸: ثابت کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 + 2}{3x^3 - 1}$ در

دامنه‌اش معکوس‌پذیر است و معکوس آن را به دست آورید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم تابع یک‌به‌یک است. طبق تعریف تابع یک‌به‌یک به ازای

هر $a, b \in \mathbb{R}$ ، از برابری $f(a) = f(b)$ داریم: $\frac{a^3 + 2}{3a^3 - 1} = \frac{b^3 + 2}{3b^3 - 1}$. این عبارت را طرفین وسطین کرده نتیجه می‌گیریم که:

$$3a^3b^3 - a^3 + 6b^3 - 2 = 3a^3b^3 - b^3 + 6a^3 - 2$$

$$3a^3b^3 = 3a^3b^3$$

$$a^3 = b^3$$

$$\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{b^3}$$

$$a = b$$

حال معکوس تابع $y = \frac{x^3 + 2}{3x^3 - 1}$ را به دست می‌آوریم. این عبارت را طرفین

وسطین کرده و x را بر حسب y به دست می‌آوریم. لذا داریم:

$$3x^3y - y = x^3 + 2$$

$$x^3(3y - 1) = y + 2$$

$$x^3 = \frac{y + 2}{3y - 1}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{y + 2}{3y - 1}} = f^{-1}(y)$$

با تغییر نام X به Y و Y به X به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{3x-1}}$$

۷-۱۴-۳ نکته: هرگاه f تابعی معکوس‌پذیر و f^{-1} معکوس آن باشد، آن‌گاه به ازای هر $x \in D_f$ داریم:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \text{و} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

۷-۱۴-۴ نکته: با توجه به نکته ۷-۱۴-۳ می‌توان گفت که دو تابع f و g معکوس یکدیگرند هرگاه این شرایط برقرار باشد:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = x \quad , x \in D_f \quad \text{به ازای هر}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = x \quad , x \in D_g \quad \text{به ازای هر}$$

مثال ۷۹: ثابت کنید که دو تابع $f(x) = \sqrt[3]{2x-3}$ و $g(x) = \frac{x^3+3}{2}$

معکوس یکدیگرند.

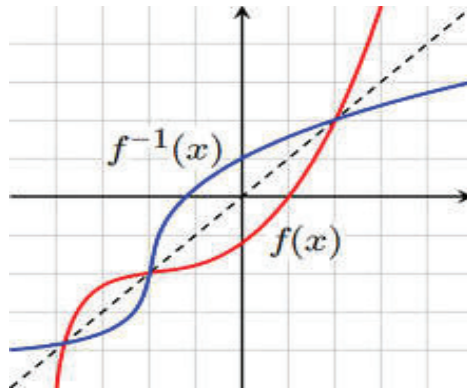
حل: دامنه توابع f و g برابر $\mathbb{R}$ است، بنابراین کافی است روابط زیر را به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ثابت کنیم.

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[3]{2x-3}) = \frac{(\sqrt[3]{2x-3})^3 + 3}{2} = x$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x^3+3}{2}\right) = \sqrt[3]{2\left(\frac{x^3+3}{2}\right) - 3} = x$$

۷-۱۴-۵ نکته: نمودار تابع f و f^{-1} ، نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط $y=x$) قرینه یکدیگر می‌باشند. چون انعکاس نسبت به نیمساز ربع اول و سوم موجب جابجایی مولفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب تابع f می‌شود، بنابراین برای رسم نمودار f^{-1} کافی است ابتدا نمودار f را رسم کرده و سپس قرینه آن را نسبت به خط $y=x$ به دست آوریم.

مثال ۸۰: شکل زیر نمودار تابع f و معکوس آن f^{-1} را نشان می‌دهد.



۷-۱۴-۶ نکته: اگر توابع f و g معکوس‌پذیر باشند، آن‌گاه رابطه زیر برقرار است:

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

تمرین

نشان دهید توابع زیر در دامنه تعریف‌شان معکوس‌پذیرند و سپس معکوس آن‌ها را به دست آورید.

۱) $f(x) = x - 3$

۲) $f(x) = x^3 + 8$

۳) $f(x) = \sqrt[3]{8x^5 - 2}$

۴) $f(x) = \sqrt[5]{2x^3 - 4}$

۵) $f(x) = (x+1)^3 - 5$

۶) $f(x) = 2x^5 - 7$

۷) معکوس تابع $f(x) = \frac{x^5 + 3}{x^5 - 1}$ را به دست آورید.

۸) معکوس تابع $f(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^3 + 5}$ را بیابید.

۹) معکوس تابع $f(x) = (x+3)^5 - 4$ را پیدا کنید.

۱۰) معکوس تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ را به دست آورید.

۱۱) معکوس تابع $f(x) = x + \sqrt{2x}$ را با فرض $x > 0$ پیدا کنید.

۷-۱۵ تابع متناوب

تابع متناوب، دسته‌ای خاصی از توابع هستند که رفتاری تکراری دارند، بدین معنا که در بازه‌های مشخصی ویژگی‌های این توابع دقیقاً تکرار می‌شوند. اگر نمودار یک تابع متناوب را در یکی از بازه‌های تکرار بررسی کنیم، آن‌گاه به دلیل تکراری بودن رفتار توابع متناوب، در حقیقت رفتار تابع را در تمام نقاط دامنه‌ی آن بررسی کرده‌ایم. معروف‌ترین توابع متناوب، توابع مثلثاتی هستند.

۷-۱۵-۱ تعریف: تابع f را متناوب گوئیم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱- عددی مخالف صفر مانند t وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $x \in D_f$ ،
داشته باشیم $x + t \in D_f$.

۲- به ازای هر x متعلق به دامنه f داشته باشیم: $f(x+t) = f(x)$.

کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبت t را در صورت وجود دوره تناوب اصلی می‌نامیم.

مثال ۸۱: متناوب بودن تابع $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) را بررسی کنید.

حل: داریم: $D_f = \mathbb{R}$. لذا به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، عدد حقیقی مانند t وجود دارد به طوری‌که $x + t \in D_f$. پس تابع شرط لازم برای متناوب بودن را دارد، از سوی دیگر به ازای هر t متعلق به $\mathbb{R}$ داریم:

$$f(x+t) = c = f(x)$$

بنابراین تابع متناوب است.

مثال ۸۲: متناوب بودن تابع $f(x) = x - [x]$ را بررسی کرده و دوره تناوب آن را در صورت وجود به دست آورید.

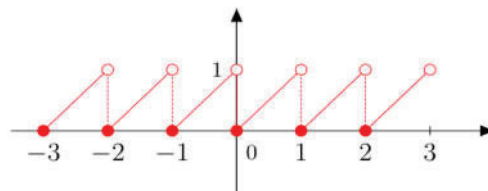
حل: داریم: $D_f = \mathbb{R}$. لذا به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، عدد حقیقی مانند t وجود دارد به طوری که $x + t \in D_f$. پس تابع شرط لازم برای متناوب بودن را دارد، از سوی دیگر به ازای $t = 1$ داریم:

$$f(x+1) = x+1 - [x+1] = x - [x] = f(x)$$

بنابراین تابع f متناوب است. برای به دست آوردن دوره تناوب با توجه به خواص تابع جزء صحیح به ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$f(x+k) = x+k - [x+k] = x+k - [x] - k = x - [x] = f(x)$$

اما از آن جایی که $+1$ کوچک‌ترین عدد حقیقی است که به ازای هر عدد حقیقی x رابطه $f(x+1) = f(x)$ برقرار است، پس $+1$ دوره تناوب تابع است. شکل زیر نمودار این تابع را نشان می‌دهد:



۷-۱۵ نکته: برای رسم توابع متناوب کافی است تابع را در یک دوره تناوب آن رسم کنیم، چون شکل منحنی در فواصل بعدی عیناً تکرار می‌شود.

تمرین

۱- متناوب بودن تابع $f(x) = x$ را بررسی کرده و دوره تناوب آن را در صورت وجود به دست آورید.

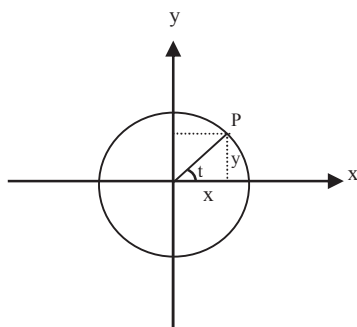
۲- دوره تناوب تابع $f(x) = [x]$ را به دست آورید.

۷-۱۶ توابع مثلثاتی

در مبحث مثلثات با نسبت‌های مثلثاتی آشنا شدیم. اکنون توضیحاتی در مورد توابع سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت و دامنه و برد آن‌ها داده و نمودار این توابع را رسم می‌کنیم.

۷-۱۶-۱ تعریف: تابع سینوس به صورت $f(t) = \sin t$ ، که در آن t زاویه (برحسب رادیان) است نمایش داده می‌شود. طبق شکل زیر فرض کنیم $p(x, y)$ نقطه تقاطع ضلع پایان زاویه t با دایره مثلثاتی (دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع یک) باشد. در این صورت تابع سینوس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(t) = \sin t = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه } t}{\text{وتر}} = \frac{y}{1} = y$$



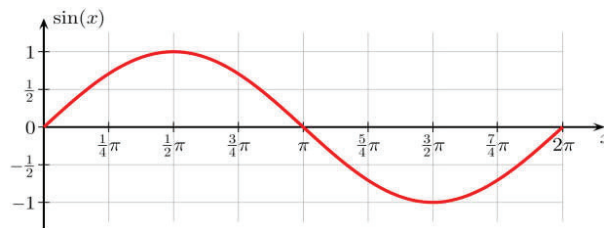
در این تابع، دامنه مجموعه اعداد حقیقی و برد آن بازه $[-1, 1]$ می‌باشد.

مثال ۸۳: نمودار تابع $f(x) = \sin x$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

حل: با استفاده از روش نقطه‌یابی تابع را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم.

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰

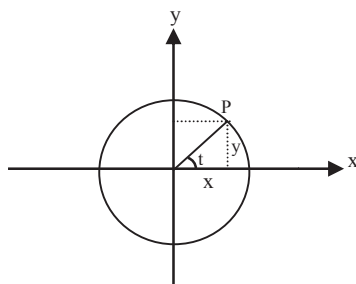
با یافتن این نقاط و وصل کردن آن‌ها به یکدیگر نمودار تابع $y = \sin x$ به صورت زیر به دست می‌آید:



اگر نمودار فوق در بازه $[-2\pi, 0]$ نیز رسم و در جهت منفی محور x ‌ها گسترش یابد، مشاهده می‌گردد که موج سینوسی آن هر 2π رادیان تکرار می‌شود. بنابراین تابع $y = \sin x$ یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب 2π است.

۷-۱۶-۲ تعریف: تابع کسینوس به صورت $f(t) = \cos t$ ، که در آن t زاویه (برحسب رادیان) است نمایش داده می‌شود. طبق شکل زیر فرض کنیم $p(x, y)$ نقطه تقاطع ضلع پایان زاویه t با دایره مثلثاتی باشد. در این صورت تابع کسینوس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(t) = \cos t = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه } t}{\text{وتر}} = \frac{x}{1} = x$$



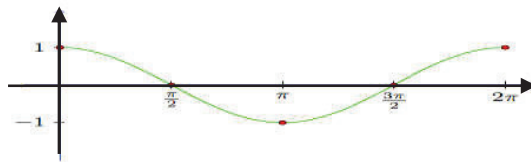
در این تابع دامنه مجموعه اعداد حقیقی و برد آن بازه $[-1, 1]$ می‌باشد.

مثال ۸۴: نمودار تابع $f(x) = \cos x$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

حل: با استفاده از روش نقطه‌یابی تابع را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم.

X	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	۱	۰	-۱	۰	۱

با یافتن این نقاط و وصل کردن آن‌ها به یکدیگر نمودار تابع $f(x) = \cos x$ به صورت زیر به دست می‌آید:



اگر نمودار فوق در بازه $[-2\pi, 0]$ رسم و در جهت منفی محور x ‌ها گسترش یابد مشاهده می‌گردد که موج سینوسی آن هر 2π رادیان تکرار می‌شود. بنابراین تابع $y = \cos x$ یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب 2π است.

۳-۱۶-۷ تعریف: اگر x عددی حقیقی باشد و $\cos x \neq 0$ ، آن‌گاه تابع تانژانت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

در این تابع مقادیری از x که به ازای آن‌ها $\cos x = 0$ عبارتند از $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$ ، این مقادیر در دامنه تابع قرار نمی‌گیرند، چون نمی‌توان عددی را بر صفر تقسیم کرد؛ لذا دامنه تابع تانژانت برابر است با:

$$\left\{ x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{Z} \right\}$$

برد این تابع مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد.

۷-۱۶-۴ تعریف: اگر x عددی حقیقی و $\sin x \neq 0$ ، آنگاه تابع کتانژانت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

در این تابع مقادیری از x که به ازای آن‌ها $\sin x = 0$ عبارتند از $x = k\pi$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$ ، این مقادیر در دامنه تابع قرار نمی‌گیرند، چون نمی‌توان عددی را بر صفر تقسیم کرد؛ لذا دامنه تابع کتانژانت برابر است با:

$$\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

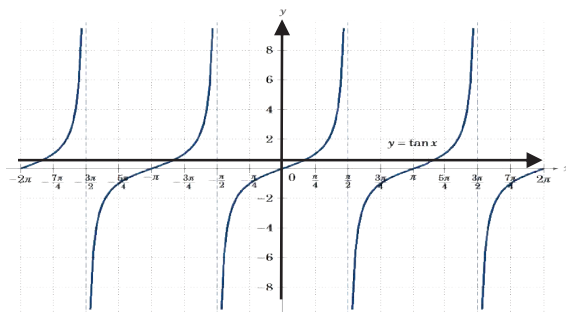
برد این تابع مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد.

مثال ۸۵: نمودار تابع $f(x) = \tan x$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل: با استفاده از روش نقطه‌یابی، تابع را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می‌کنیم.

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cot x$	$\cdot$	∞	$\cdot$	∞	$\cdot$	∞	$\cdot$	∞	$\cdot$

با یافتن این نقاط و وصل کردن آن‌ها به یکدیگر نمودار تابع $y = \tan x$ به صورت زیر به دست می‌آید:



با توجه به نمودار تابع تانژانت می‌توان نتیجه گرفت که دوره‌ی تناوب این تابع برابر با π می‌باشد.

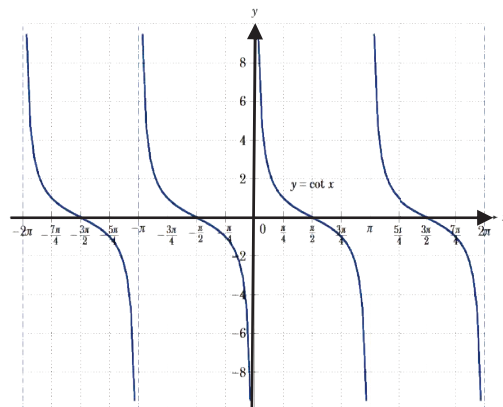
همچنین نمودار تابع تانژانت نسبت به مبدأ متقارن است. پس تابع تانژانت تابعی فرد است.

مثال ۸۶: نمودار تابع $f(x) = \cot x$ را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

حل: با استفاده از روش نقطه‌یابی، تابع را در فاصله $[-2\pi, 2\pi]$ رسم می‌کنیم.

X	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cot x$	∞	۰	∞	۰	∞	۰	∞	۰	∞

با یافتن این نقاط و وصل کردن آن‌ها به یکدیگر نمودار تابع $y = \cot x$ به صورت زیر به دست می‌آید:



در نمودار فوق مشاهده می‌گردد که نمودار هر π رادیان تکرار می‌شود. بنابراین تابع $y = \cot x$ یک تابع متناوب با دوره‌ی تناوب π است.

همچنین نمودار تابع کتانژانت نسبت به مبدأ متقارن است. پس تابع کتانژانت تابعی فرد است.

۷-۱۷ توابع معکوس مثلثاتی

می‌دانیم که شرط معکوس‌پذیری یک تابع آن است که یک به یک باشد. بنابراین برای آن که بتوانیم معکوس توابع مثلثاتی را تعریف کنیم، لازم است که دامنه تعریف این توابع را محدود سازیم تا این شرط برقرار شود.

۷-۱۷-۱ تعریف: تابع معکوس تابع $f(x) = \sin x$ را به صورت

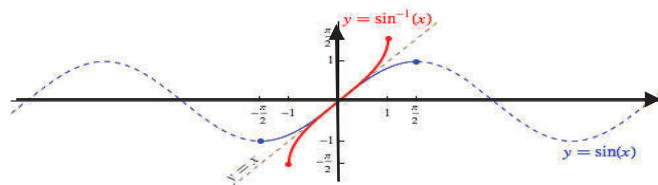
$$f^{-1}(x) = \text{Arcsin } x \text{ نشان داده و آن را آرک سینوس } x \text{ می‌خوانیم.}$$

می‌دانیم که دامنه تابع $y = \sin x$ ، مجموعه اعداد حقیقی و برد آن بازه $[-1, 1]$ می‌باشد، برای برقراری شرط معکوس‌پذیری لازم است که دامنه تابع را به زیر بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود سازیم. در این صورت تابع در این فاصله یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر خواهد بود.

$$f(x) = \sin x, \quad D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad R_f = [-1, 1]$$

$$f^{-1}(x) = \text{Arcsin } x, \quad D_{f^{-1}} = [-1, 1], \quad R_{f^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

با توجه به این نکته که نمودار تابع f و f^{-1} ، نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط $y=x$) قرینه یکدیگر می‌باشند، برای رسم نمودار $f^{-1}(x) = \text{Arcsin } x$ کافی است ابتدا نمودار $f(x) = \sin x$ را رسم کرده و سپس قرینه آن را نسبت به خط $y=x$ به دست آوریم.



مثال ۸۷: دامنه تابع $f(x) = \text{Arc sin}(3x - 2)$ را به دست آورید.

حل: با توجه به تعریف ۱-۱۷-۷ دامنه تابع آرک سینوس بازه $[-1, 1]$ می باشد. لذا داریم:

$$-1 \leq 3x - 2 \leq 1$$

بنابراین $1 \leq 3x \leq 3$ ، در نتیجه $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$. لذا دامنه تابع برابر است با:

$$D_f = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

۱-۱۷-۷ نکته: تابع معکوس سینوس که با نماد $y = \text{Arc sin } x$ نمایش داده

می شود، عدد منحصر به فرد y در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ است به طوری که $x = \sin y$.

مثال ۸۸: مطلوب است محاسبه مقدار $y = \text{Arc sin} \frac{\sqrt{2}}{4}$.

حل: با استفاده از نکته ۱-۱۷-۷ باید کمانی مانند y در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ به دست

آوریم به طوری که سینوس آن برابر $\frac{\sqrt{2}}{4}$ باشد. لذا جواب برابر با $y = \frac{\pi}{4}$ خواهد

بود.

۲-۱۷-۷ تعریف: تابع معکوس تابع $f(x) = \cos x$ را به صورت

$$f^{-1}(x) = \text{Arc cos } x$$

می دانیم که دامنه تابع $y = \cos x$ ، مجموعه اعداد حقیقی و برد آن بازه

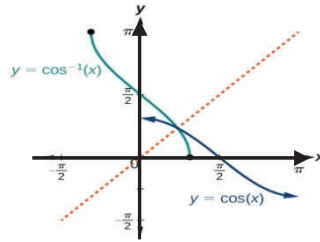
$[-1, 1]$ می باشد، حال زیر بازه $[0, \pi]$ از این دامنه را در نظر می گیریم. در این

بازه تابع $f(x) = \cos x$ یک به یک و لذا معکوس پذیر است. بنابراین:

$$f(x) = \cos x, \quad D_f = [0, \pi], \quad R_f = [-1, 1]$$

$$f^{-1}(x) = \text{Arc cos } x, \quad D_{f^{-1}} = [-1, 1], \quad R_{f^{-1}} = [0, \pi]$$

برای رسم نمودار $f^{-1}(x) = \text{Arc cos } x$ کافی است ابتدا نمودار $f(x) = \cos x$ را رسم کرده و سپس قرینه آن را نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم. نمودار این تابع به صورت زیر می‌باشد:



مثال ۸۹: دامنه تابع $f(x) = \text{Arc cos}(2x - 1)$ را به دست آورید.

حل: با توجه به تعریف $2-17-7$ دامنه تابع آرک کسینوس بازه $[-1, 1]$ می‌باشد. لذا داریم:

$$-1 \leq 2x - 1 \leq 1$$

بنابراین $0 \leq 2x \leq 2$ ، در نتیجه $0 \leq x \leq 1$. لذا دامنه تابع برابر است با:

$$D_f = [0, 1]$$

۲-۱۷-۷ نکته: تابع معکوس کسینوس که با نماد $y = \text{Arccos } x$ نمایش داده می‌شود، عدد منحصر به فرد y در بازه $[0, \pi]$ است به طوری که $x = \cos y$.

مثال ۹۰: مطلوب است محاسبه مقدار $y = \text{Arccos } \frac{1}{3}$.

حل: با استفاده از نکته $2-17-7$ باید کمانی مانند y در بازه $[0, \pi]$ به دست

آوریم که کسینوس آن برابر $\frac{1}{3}$ باشد. بنابراین جواب برابر با $y = \frac{\pi}{3}$ خواهد بود.

۳-۱۷-۷ تعریف: تابع معکوس تابع $f(x) = \tan x$ را به صورت

$$f^{-1}(x) = \text{Arc tan } x$$

نشان داده و آن را آرک تانژانت x می‌خوانیم.

می‌دانیم که دامنه تابع $f(x) = \tan x$ برابر است با:

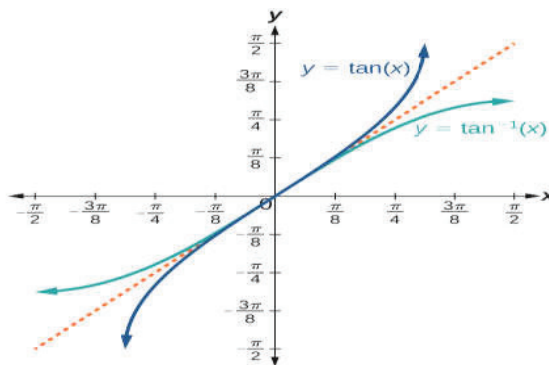
$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid \cos x = 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

برد این تابع نیز برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد. لذا برای برقراری شرط معکوس‌پذیری لازم است که دامنه تابع را به زیر بازه باز $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ محدود سازیم. در این صورت تابع در این فاصله یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر خواهد بود. لذا همواره داریم:

$$f(x) = \tan x, \quad D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad R_f = \mathbb{R}$$

$$f^{-1}(x) = \text{Arc tan } x, \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad R_{f^{-1}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

برای رسم نمودار $f^{-1}(x) = \text{Arc tan } x$ کافی است ابتدا نمودار $f(x) = \tan x$ را رسم کرده و سپس قرینه آن را نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم. نمودار این تابع به صورت زیر می‌باشد:



۷-۱۷-۳ نکته: تابع معکوس تانژانت که با نماد $y = \text{Arc tan } x$ نمایش داده

می‌شود، عدد منحصر به فرد y در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ است به طوری که $x = \tan y$.

مثال ۹۱: مطلوب است محاسبه مقدار $y = \text{Arctan } 1$.

حل: با استفاده از نکته ۷-۱۷-۳ باید کمانی مانند y در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ به دست

آوریم که تانژانت آن برابر ۱ باشد. لذا جواب برابر با $y = \frac{\pi}{4}$ خواهد بود.

۷-۱۷-۴ تعریف: تابع معکوس تابع $f(x) = \cot x$ را به صورت

$$f^{-1}(x) = \operatorname{Arccot} x$$

نشان داده و آن را آرک کتانژانت x می‌خوانیم.

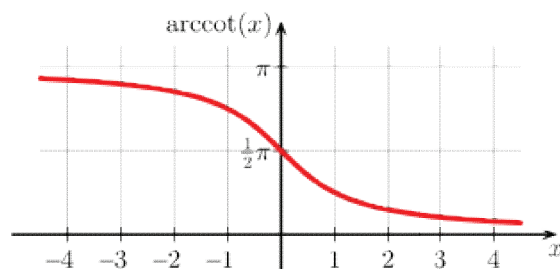
می‌دانیم که دامنه تابع $f(x) = \cot x$ برابر است با:

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

برد این تابع نیز برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد. لذا برای برقراری شرط معکوس‌پذیری کافی است دامنه تابع را به زیر بازه باز $(0, \pi)$ محدود سازیم. در این صورت تابع در این فاصله یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر خواهد بود. لذا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cot x, & D_f &= (0, \pi), & R_f &= \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) &= \operatorname{Arccot} x, & D_{f^{-1}} &= \mathbb{R}, & R_{f^{-1}} &= (0, \pi) \end{aligned}$$

نمودار این تابع به صورت زیر می‌باشد:



۷-۱۷-۴ نکته: تابع معکوس کتانژانت که با نماد $y = \operatorname{Arccot} x$ نمایش داده

می‌شود، عدد منحصر به فرد y در بازه $(0, \pi)$ است به طوری که $x = \cot y$.

مثال ۹۲: مطلوب است محاسبه مقدار $y = \operatorname{Arccot} \sqrt{3}$.

حل: با استفاده از نکته ۷-۱۷-۴ باید کمانی مانند y در بازه $(0, \pi)$ به دست

آوریم که کتانژانت آن برابر $\sqrt{3}$ باشد. بنابراین جواب برابر با $y = \frac{\pi}{6}$ خواهد بود.

مثال ۹۳: مطلوب است محاسبه مقدار $\tan(\arccot \frac{\sqrt{3}}{3})$.

حل: ابتدا با استفاده از نکته ۷-۱۷-۴ باید کمانی در بازه $(0, \pi)$ به دست آوریم

که کتانژانت آن برابر $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد. بنابراین حاصل $\arccot \frac{\sqrt{3}}{3}$ برابر با $\frac{\pi}{3}$ خواهد بود.

لذا داریم $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$.

مثال ۹۴: مطلوب است محاسبه مقدار $\tan(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2})$.

حل: ابتدا با استفاده از نکته ۷-۱۷-۲ باید کمانی در بازه $[0, \pi]$ به دست آوریم که

کسینوس آن برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد. بنابراین حاصل $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر با $\frac{\pi}{6}$ خواهد بود.

لذا داریم $\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

۷-۱۷-۵ نکته: روابط زیر همواره برقرار است:

الف: هرگاه $-1 \leq x \leq 1$ ، آن گاه $\sin(\arcsin x) = x$.

ب: هرگاه $-1 \leq x \leq 1$ ، آن گاه $\cos(\arccos x) = x$.

ج: به ازای هر عدد حقیقی x داریم $\tan(\arctan x) = x$.

د: به ازای هر عدد حقیقی x داریم $\cot(\arccot x) = x$.

تمرین

(۱) حاصل عبارت $\text{Arcsin} 0 + \text{Arcsin} 1 + \text{Arcsin}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ را بیابید.

(۲) حاصل عبارت $\text{Arc cos} 0 + \text{Arc sin} \frac{\sqrt{3}}{2} + \text{Arcsin}(-\frac{1}{2})$ را بیابید.

(۳) حاصل عبارت $\tan(\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3})$ را پیدا کنید.

(۴) مقدار $\sin(\cos^{-1} 0)$ را محاسبه کنید.

(۵) مقدار $\cos^{-1}(\frac{1}{2} \tan \frac{2\pi}{3})$ را پیدا کنید.

(۶) مقدار $\cos(\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2})$ را پیدا کنید.

(۷) مقدار $\sin^{-1}(\cos \frac{5\pi}{6})$ را پیدا کنید.

(۸) دامنه تابع $f(x) = 7 - \text{Arcsin}(\sqrt{x})$ را پیدا کنید.

(۹) دامنه تابع $f(x) = \text{Arc cos}(\frac{2}{x-5})$ را بیابید.

(۱۰) دامنه تابع $f(x) = 6 \text{Arc sin}(\frac{x}{x+3})$ را پیدا کنید.

(۱۱) دامنه تابع $f(x) = 2 + \text{Arc tan}(\sqrt{2x-2})$ را پیدا کنید.

(۱۲) دامنه تابع $f(x) = 5x + \text{Arccot}(\sqrt{x-2})$ را پیدا کنید.

۷-۱۸ تابع نمایی

۷-۱۸-۱ تعریف: برای هر عدد حقیقی ثابت $a > 0$ و $a \neq 1$ ، تابع

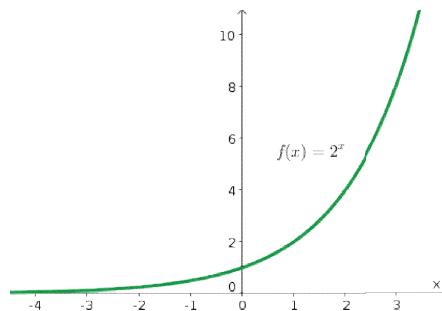
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ با ضابطه } f(x) = a^x \text{ را یک تابع نمایی می‌نامیم.}$$

مثال ۹۵: نمودار تابع نمایی $f(x) = 2^x$ را رسم کنید.

حل: برای رسم این تابع از روش نقطه‌یابی عمل می‌کنیم. جدول زیر بعضی از مقادیر این تابع را نشان می‌دهد.

x		-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	
2^x		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴	۸	

با یافتن این نقاط و وصل کردن آن‌ها به یکدیگر نمودار تابع $f(x) = 2^x$ به صورت زیر به دست می‌آید:



همان طور که در نمودار فوق می‌بینید دامنه تابع نمایی $f(x) = 2^x$ مجموعه اعداد حقیقی و برد آن فاصله‌ی $(0, +\infty)$ است.

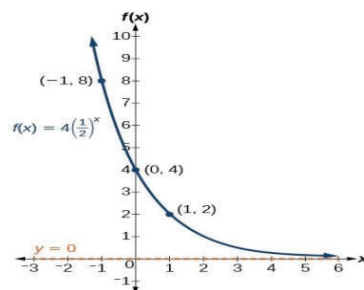
مثال ۹۶: نمودار تابع $f(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید.

حل: برای رسم این تابع از روش نقطه‌یابی عمل می‌کنیم.

X		-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	
$۴(\frac{1}{۲})^x$		۳۲	۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{1}{۲}$	

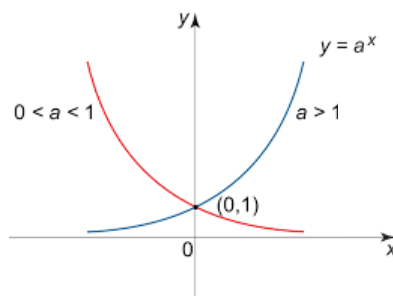
با یافتن این نقاط و وصل کردن آن‌ها به یکدیگر نمودار تابع $f(x) = ۴(\frac{1}{۲})^x$ به

صورت زیر به دست می‌آید:



همان طور که در نمودار فوق می‌بینید دامنه تابع نمایی $f(x) = ۴(\frac{1}{۲})^x$ مجموعه اعداد حقیقی و برد آن فاصله $(۰, +\infty)$ است.

۷-۱۸-۱ نکته: نمودار تابع نمایی در حالت کلی به شکل زیر می‌باشد:



با توجه به نمودار تابع نمایی نتایج زیر را داریم:

- دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی و برد آن فاصله $(۰, +\infty)$ است.

- تابع نمایی یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس پذیر است.

۷-۱۸-۲ نکته: به ازای هر دو عدد حقیقی X و Y روابط زیر همواره برقرارند:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

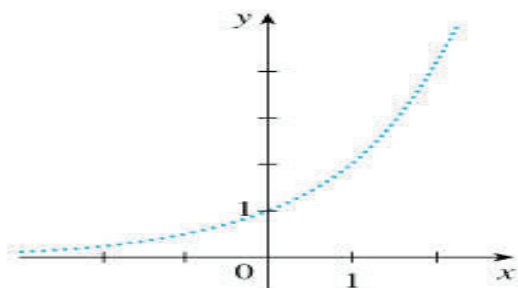
۷-۱۸-۲ تعریف: در تعریف تابع نمایی، هرگاه عدد ثابت a را برابر با عدد گنگ e که مقدار تقریبی آن برابر با $2/7182818288 \dots$ است انتخاب کنیم، در این صورت تابع $f(x) = e^x$ را تابع نمایی طبیعی نامیده و آن را با نماد $e^x = \exp(x)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۹۷: نمودار تابع $f(x) = e^x$ را رسم کنید.

حل: برای رسم این تابع از روش نقطه‌یابی عمل می‌کنیم. جدول زیر بعضی مقادیر تابع $f(x) = e^x$ را نشان می‌دهد.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = e^x$	۰/۱۳۵	۰/۳۶۸	۱	۲/۷۱۸	۷/۳۸۹

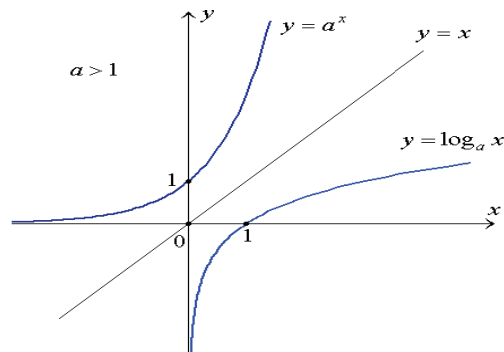
با یافتن این نقاط و وصل کردن آن‌ها به یکدیگر نمودار تابع $f(x) = e^x$ به صورت زیر به دست می‌آید:



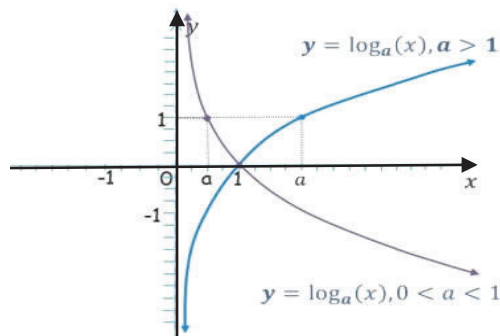
۷-۱۹ تابع لگاریتمی

۷-۱۹-۱ تعریف: تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک‌به‌یک است؛ لذا معکوس‌پذیر می‌باشد. معکوس این تابع را تابع لگاریتمی در مبنای a نامیده و آن را به صورت $f^{-1}(x) = \log_a^x$ نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف تابع نمایی $a > 0$ و $a \neq 1$ است. همچنین با توجه به خواص تابع معکوس $D_{f^{-1}} = R_f = (0, +\infty)$ ، لذا تابع لگاریتم فقط برای اعداد حقیقی مثبت قابل تعریف است و همواره داریم $y = \log_a^x$ اگر و فقط اگر $x = a^y$.

نمودار تابع لگاریتم، قرینه نمودار تابع نمایی $f(x) = e^x$ نسبت به خط $y = x$ می‌باشد؛ لذا درحالتی که $a > 1$ باشد نمودار تابع $y = \log_a^x$ به شکل زیر می‌باشد:



نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی به شکل زیر می‌باشد:



مثال ۹۸: تساوی‌های داده شده را به صورت یک رابطه با نماد لگاریتمی بیان کنید.

$$\text{الف: } 2^3 = 8 \quad \text{ب: } 3^3 = 27 \quad \text{ج: } 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

حل: با استفاده از رابطه $x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a^x$ داریم:

$$\text{الف: } 2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2^8 = 3 \quad \text{ب: } 3^3 = 27 \Leftrightarrow \log_3^{27} = 3$$

$$\text{ج: } 3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3^{\frac{1}{9}} = -2$$

مثال ۹۹: تساوی‌های زیر را به صورت یک رابطه با نماد نمایی نشان دهید.

$$\text{الف: } \log_4^{16} = 2 \quad \text{ب: } \log_7^1 = 0 \quad \text{ج: } \log_{12}^{12} = 1$$

حل: با استفاده از رابطه $x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a^x$ داریم:

$$\text{الف: } \log_4^{16} = 2 \Leftrightarrow 4^2 = 16 \quad \text{ب: } \log_7^1 = 0 \Leftrightarrow 7^0 = 1$$

$$\text{ج: } \log_{12}^{12} = 1 \Leftrightarrow 12^1 = 12$$

۷-۱۹-۱ نکته: لگاریتم هر عدد در مبنای خودش برابر یک می‌باشد. لذا داریم:

$$\log_a^a = 1$$

۷-۱۹-۲ نکته: لگاریتم عدد یک در هر مبنایی برابر صفر است. به عبارت دیگر:

$$\log_a^1 = 0$$

۷-۱۹-۳ نکته: لگاریتم به ازای اعداد منفی تعریف نشده است.

۷-۱۹-۴ نکته: با توجه به تعریف تابع لگاریتم برای به دست آوردن دامنه تابع

لگاریتمی $f(x) = \log_{h(x)}^{g(x)}$ لازم است که شرایط زیر در نظر گرفته شود:

$$g(x) > 0, \quad h(x) > 0 \quad \text{و} \quad h(x) \neq 1$$

مثال ۱۰۰: دامنه تابع $f(x) = \log_v(x-2)$ را به دست آورید.

حل: با توجه به نکته ۷-۱۹-۴ کافی است $x-2 > 0$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $x > 2$. پس دامنه تابع برابر است با:

$$D_f = (2, +\infty)$$

مثال ۱۰۱: دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{[x+1]} + \log_4 x^2$ را به دست آورید.

حل: با توجه به تعریف دامنه تابع گویا مخرج کسر نباید صفر شود. لذا داریم $[x+1] \neq 0$. در نتیجه $[x] \neq -1$. بنابراین بنا به خواص تابع جزء صحیح داریم $x \in \mathbb{R} - [-1, 0)$.

برای تعیین دامنه تابع لگاریتمی باید $x^2 > 0$ باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. از اشتراک شرایط اخیر دامنه تابع معین می‌شود. لذا داریم:

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

مثال ۱۰۲: دامنه تابع $f(x) = \log_5(x^2 - 16)$ را به دست آورید.

حل: با توجه به تعریف دامنه تابع لگاریتم برای تعیین دامنه لازم است که $x^2 - 16 > 0$. برای حل این نامعادله قرار می‌دهیم $x^2 - 16 = 0$ و با استفاده از اتحاد مزدوج آن را تجزیه کرده، نتیجه می‌گیریم که $(x-4)(x+4) = 0$ ، پس داریم $x = 4$ یا $x = -4$. حال از طریق تعیین علامت قسمت‌هایی را که عبارت زیر رادیکال بزرگتر از صفر است، مشخص می‌کنیم.

X	$-\infty$	-4	4	$+\infty$	
X^2-16	+	۰	-	۰	+

لذا دامنه برابر است با:

$$D_f = (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$$

مثال ۱۰۳: دامنه تابع $f(x) = \log_x (x^2 - 9x + 8)$ را به دست آورید.

حل: برای تعیین دامنه تابع لازم است که $x^2 - 9x + 8 > 0$ ، $x > 0$ و $x \neq 1$.
برای حل نامعادله $x^2 - 9x + 8 > 0$ قرار می‌دهیم $x^2 - 9x + 8 = 0$ و با استفاده از اتحاد جمله مشترک آن را تجزیه کرده، نتیجه می‌گیریم که $(x-1)(x-8) = 0$ ، پس داریم $x = 8$ یا $x = 1$. حال از طریق تعیین علامت قسمت‌هایی را که عبارت زیر رادیکال بزرگتر از صفر است، مشخص می‌کنیم.

X	$-\infty$	1	8	$+\infty$	
$X^2 - 9X + 8$	+	•	-	•	+

از اشتراک شرایط اخیر نتیجه می‌شود:

$$D_f = (0, 1) \cup (8, +\infty)$$

۷-۱۹-۵ نکته: به ازای هر دو عدد حقیقی مثبت X و Y ، همواره روابط زیر برقرار هستند:

الف: $\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$

ب: $\log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y$

ج: $\log_a^{x^n} = n \log_a^x$

۷-۱۹-۶ نکته: اگر X, a, y اعداد حقیقی مثبتی باشند و $a \neq 1$ و $y \neq 1$ ، آن‌گاه همواره روابط زیر برقرار هستند:

الف: $a^{\log_a^x} = x$ ب: $\log_y^x = \frac{\log_a^x}{\log_a^y}$

ج: $\log_a^x \log_x^a = 1, x \neq 1$ د: $\log_{a^m}^{x^n} = \frac{n}{m} \log_a^x$

مثال ۱۰۴: اگر $\log_{\frac{1}{2}} 2 = 0/301$ و $\log_{\frac{1}{5}} 5 = 0/6990$ ، مطلوب است محاسبه

$$\log_{\frac{1}{2}} 125 \text{ و } \log_{\frac{1}{5}} \frac{5}{2}$$

حل: با توجه به خواص لگاریتم داریم:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{2} = \log_{\frac{1}{5}} 5 - \log_{\frac{1}{2}} 2 = 0/6990 - 0/301 = 0/398$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 125 = \log_{\frac{1}{5}} 5^3 = 3 \log_{\frac{1}{5}} 5 = 3 \times 0/6990 = 2/097$$

مثال ۱۰۵: مقدار $\log_{\frac{1}{25}} 5$ را به دست آورید.

حل: با توجه به قسمت (د) نکته ۷-۱۹-۶ و نکته ۷-۱۹-۱ داریم:

$$\log_{\frac{1}{25}} 5 = \log_{\frac{1}{5^2}} 5 = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{5}} 5 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

مثال ۱۰۶: حاصل $\log_{\frac{1}{28}} \frac{1}{7}$ را بیابید.

حل: با توجه به قسمت (ب) نکته ۷-۱۹-۵ و قسمت (د) نکته ۷-۱۹-۶ داریم:

$$\log_{\frac{1}{28}} \frac{1}{7} = \log_{\frac{1}{2 \times 7}} \frac{1}{7} = 0 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{7} = -\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 7 = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

مثال ۱۰۷: حاصل $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[3]{3}$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به خواص لگاریتم داریم:

$$\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[3]{3} = \log_{\frac{1}{3^2}} 3^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{3^{-2}}} 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{-2} \log_{\frac{1}{3}} 3 = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

مثال ۱۰۸: حاصل $2^{\log_2 8}$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به قسمت (الف) نکته ۶-۱۹-۷ داریم ${}_2\log_2^7 = 7$.

مثال ۱۰۹: حاصل $\log_2^{\sqrt[3]{64}}$ را به دست آورید.

حل: ابتدا رادیکال را با استفاده از فرمول $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ تبدیل به یک مقدار توان دار کرده، سپس با توجه به قسمت (د) نکته ۶-۱۹-۷ و نکته ۷-۱۹-۱ آن را حل می‌کنیم.

$$\log_2^{\sqrt[3]{64}} = \log_2^{(64)^{\frac{1}{3}}} = \log_2^{(2^6)^{\frac{1}{3}}} = \log_2^{2^{\frac{6}{3}}} = \log_2^{2^2} = 2 \log_2^2 = 2 \times 1 = 2$$

مثال ۱۱۰: حاصل $\log_{27}^{\frac{\sqrt{3}}{9}}$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به قسمت (ب) نکته ۵-۱۹-۷ و قسمت (د) نکته ۶-۱۹-۷ داریم:

$$\begin{aligned} \log_{27}^{\frac{\sqrt{3}}{9}} &= \log_{27}^{\sqrt{3}} - \log_{27}^9 = \log_{3^3}^{\frac{1}{2}} - \log_{3^3}^{3^2} = \frac{1}{3} \log_3^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \log_3^3 \\ &= \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال ۱۱۱: حاصل $\log_6^{2\sqrt{3}} + \log_6^{3\sqrt{2}}$ را به دست آورید.

حل: با توجه به قسمت (الف) نکته ۵-۱۹-۷ داریم:

$$\begin{aligned} \log_6^{2\sqrt{3}} + \log_6^{3\sqrt{2}} &= \log_6^{2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}} = \log_6^{6\sqrt{6}} = \log_6^{6 \times 6^{\frac{1}{2}}} = \log_6^{6^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2} \log_6^6 \\ &= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

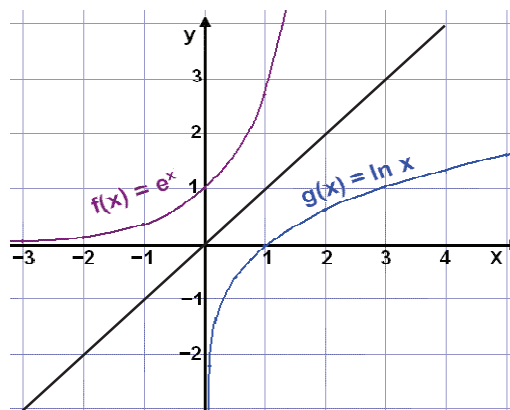
مثال ۱۱۲: حاصل عبارت $\log_5^4 \times \log_4^5$ را به دست آورید.

حل: با توجه به قسمت (ج) نکته ۶-۱۹-۷ داریم $\log_5^4 \times \log_4^5 = 1$.

۲۰-۷ تابع نمایی طبیعی

۲۰-۷-۱ تعریف: هرگاه در تابع لگاریتم مبنای a برابر عدد e انتخاب شود، آن تابع را تابع لگاریتمی طبیعی نامیده و با $\ln x$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر داریم $\log_e x = \ln x$. همچنین با توجه به تعریف تابع لگاریتم همواره داریم $y = \ln x$ اگر و فقط اگر $x = e^y$.

چون تابع نمایی طبیعی و تابع لگاریتم طبیعی معکوس یکدیگرند، برای رسم نمودار تابع $y = \ln x$ ، کافی است نمودار تابع $y = e^x$ را رسم کرده و قرینه‌ی آن را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات به دست آوریم.



مثال ۱۱۳: معکوس تابع $f(x) = \ln(x - 8)$ را بیابید.

حل: بنا به تعریف ۲۰-۷-۱ داریم:

$$y = \ln(x - 8)$$

$$e^y = x - 8$$

$$x = e^y + 8$$

با تغییر نام x به Y و y به X به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = y = e^x + 8$$

مثال ۱۱۴: معکوس تابع $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 3})$ را به دست آورید.

حل: بنا به تعریف ۷-۲۰-۱ داریم:

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 3})$$

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 3}$$

$$e^y - x = \sqrt{x^2 + 3}$$

$$(e^y - x)^2 = (\sqrt{x^2 + 3})^2$$

$$e^{2y} - 2xe^y + x^2 = x^2 + 3$$

$$e^{2y} - 3 = 2xe^y$$

$$x = \frac{e^{2y} - 3}{2e^y}$$

با تغییر نام X به Y و Y به X به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = y = \frac{e^{2x} - 3}{2e^x}$$

مثال ۱۱۵: معکوس تابع $f(x) = \log_3\left(\frac{x^2}{x^2 + 4}\right)$ ، به ازای $x > 0$ را بیابید.

حل: بنا به تعریف ۷-۱۹-۱ داریم:

$$y = \log_3\left(\frac{x^2}{x^2 + 4}\right)$$

$$3^y = \frac{x^2}{x^2 + 4}$$

$$x^2 3^y + 4 \times 3^y = x^2$$

$$x^2(1 - 3^y) = 4 \times 3^y$$

$$x^2 = \frac{4 \times 3^y}{1 - 3^y}$$

$$x = \sqrt{\frac{4 \times 3^y}{1 - 3^y}}$$

با تغییر نام X به Y و Y به X به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = y = \sqrt{\frac{4 \times 3^x}{1 - 3^x}}$$

مثال ۱۱۶: معکوس تابع $f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$ را بیابید.

حل: برای به دست آوردن معکوس تابع کافی است عبارت $y = \frac{e^x}{2 + e^x}$ را طرفین وسطین کرده و X را برحسب Y به دست آوریم. لذا داریم:

$$2y + ye^x = e^x$$

$$e^x(1 - y) = 2y$$

$$e^x = \frac{2y}{1 - y}$$

از طرفین رابطه $e^x = \frac{2y}{1 - y}$ ، $\ln$ گرفته، داریم:

$$\ln e^x = \ln \frac{2y}{1 - y}$$

$$x = \ln \frac{2y}{1 - y}$$

با تغییر نام X به Y و Y به X به دست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x) = y = \ln \frac{2x}{1 - x}$$

۷-۲۰-۲ تعریف: معادله لگاریتمی معادله‌ای است که حاوی لگاریتم باشد.

۷-۲۰-۱ نکته: به ازای هر دو عدد حقیقی مثبت X و Y ، همواره $X = Y$ اگر و

فقط اگر $\log_a^x = \log_a^y$.

مثال ۱۱۷: معادله لگاریتمی $\log_2(x - 2) + \log_2(x + 2) = \log_2 12$ را حل

کنید.

حل: با توجه به خواص لگاریتم داریم:

$$\log_1 (x+2)(x-2) = \log_1 12$$

با توجه به نکته ۷-۱۹-۷ داریم $(x+2)(x-2) = 12$. لذا نتیجه می‌گیریم که $x^2 - 4 = 12$. لذا جواب‌های معادله $x = 4$ یا $x = -4$ خواهد بود. عبارت‌های $x+2$ و $x-2$ به ازای $x = 4$ ، مقداری مثبت می‌شوند؛ لذا $x = 4$ جواب قابل قبولی برای معادله می‌باشد ولی $x = -4$ قابل قبول نیست؛ زیرا عبارت‌های $x+2$ و $x-2$ به ازای $x = -4$ مقداری منفی می‌شوند.

مثال ۱۱۸: معادله لگاریتمی $\log_{\delta} (x^2 + 21) - 2 \log_{\delta} 2x = 1$ را حل کنید.

حل: با توجه به خواص لگاریتم داریم:

$$\log_{\delta} (x^2 + 21) - 2 \log_{\delta} 2x = 1$$

$$\log_{\delta} (x^2 + 21) - 2 \times \frac{1}{2} \log_{\delta} 2x = 1$$

$$\log_{\delta} (x^2 + 21) - \log_{\delta} 2x = 1$$

$$\log_{\delta} \frac{x^2 + 21}{2x} = 1$$

با توجه به تعریف تابع لگاریتم داریم: $\frac{x^2 + 21}{2x} = \delta^1$. این رابطه را طرفین

وسطین می‌کنیم $x^2 + 21 = 10x$. در نتیجه $x^2 - 10x + 21 = 0$ ، با استفاده از اتحاد جمله مشترک داریم $(x-3)(x-7) = 0$. لذا جواب‌های معادله $x = 3$ یا $x = 7$ خواهد بود. عبارت‌های $x^2 + 21$ و $2x$ به ازای $x = 3$ و $x = 7$ مقداری مثبت می‌شوند، لذا هر دو مقدار جواب قابل قبولی برای معادله می‌باشند.

مثال ۱۱۹: معادله لگاریتمی $\log_{x-3} (x^2 - 5x + 3) = 2$ را حل کنید.

حل: با توجه به خواص لگاریتم داریم:

$$\log_{x-3}(x^2 - 5x + 3) = 2$$

$$(x-3)^2 = x^2 - 5x + 3$$

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 - 5x + 3$$

$$x = 6$$

عبارت‌های $x-3$ و $x^2 - 5x + 3$ به ازای $x = 6$ مقداری مثبت می‌شوند، پس $x = 6$ جواب قابل قبولی برای معادله می‌باشد.

مثال ۱۲۰: معادله $\log_2(x^2 + 8) - 2\log_2(x + 2) = 0$ را حل کنید.

حل: با توجه به ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$\log_2(x^2 + 8) = 2\log_2(x + 2)$$

$$\log_2(x^2 + 8) = \log_2(x + 2)^2$$

$$x^2 + 8 = (x + 2)^2$$

$$x^2 + 8 = x^2 + 4x + 4$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

عبارت‌های $x+2$ و $x^2 + 8$ به ازای $x = 1$ مقداری مثبت می‌شوند، بنابراین $x = 1$ جواب قابل قبولی برای معادله می‌باشد.

تمرین

حاصل عبارات زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

۱) $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{64}$

۲) $\log_{\sqrt[3]{16}} \frac{1}{16}$

۳) $8^{\log_8^2}$

۴) $5^{\log_5^2 + 2\log_5^2}$

زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

$$\delta) f(x) = \log_{\gamma} (x + \sqrt{1+x^2}) \quad \epsilon) f(x) = a^x - a^{-x}$$

$$\gamma) f(x) = \log_{\gamma} \frac{2+x}{2-x}$$

قلمرو توابع زیر را بیابید.

$$\delta) f(x) = \log_{\gamma} (2x+4) \quad \epsilon) f(x) = \log_{\gamma} (x^2-9)$$

$$\iota) f(x) = \sqrt{\log_{\gamma} x} \quad \iota\iota) f(x) = \sqrt{\log_{\delta} (x+2)}$$

$$\iota\iota) f(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \quad \iota\iota\iota) f(x) = \sqrt{2 + \log_{\gamma} x}$$

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\iota\epsilon) \log_{\gamma} x - \log_{\gamma} 2x + \log_{\gamma} 4x = \frac{3}{2}$$

$$\iota\delta) \log_{\gamma} (x^2-1) - \log_{\gamma} (x^2+2x-3) = \log_{\gamma} 2$$

$$\iota\epsilon) \log_{\gamma} (4x+2) - \log_{\gamma} (x+4) = 1$$

$$\iota\gamma) \log_x (x+2) = \log_x (4-x) + 1$$

$$\iota\delta) \log_{\gamma} (x^2-6x) - \log_{\gamma} (1-x) = 3$$

$$\iota\epsilon) \log x + \log(x-2) = \log(3x+12)$$

معکوس توابع زیر را به دست آورید.

$$\iota) f(x) = \ln(x + \sqrt{2x}) \quad \iota\iota) f(x) = \ln(x+3)$$

$$\iota\iota) f(x) = \log_{\gamma} (4x+8) \quad \iota\iota\iota) f(x) = \log_{\gamma} (5x-3)$$

$$\iota\epsilon) f(x) = \frac{\gamma^x - 3}{\gamma^x + 3} \quad \iota\delta) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

منابع

- (1) Apostol, T.M. , : ((Calculus)) Vol. 1, 2nd ed . john wiley & sons, Inc., NewYork. 1967.
- (2) Leithold, L. , : ((The calculus with Analytic Geometry)) Vol. 1, 5nd ed. Harper & Row Pub. New York. 1986.
- (3) Silverman, R .A : ((Modern calculus and Analytic Geometry)), Dorer puplications Inc., New York. 2012.
- (۴) توماس جورج، ب، ۱۳۷۱، حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، (جلد اول) ، ترجمه خلیل پاریاب، ، مرکز نشر دانشگاهی تهران.
- (۵) کرودیس، ج و همکاران، چاپ دوم ۱۳۸۸، حساب دیفرانسیل و انتگرال، (جلد اول) ترجمه ابوالقاسم لاله، مرکز نشر دانشگاهی تهران.
- (۶) نیکوکار مسعود، چاپ ششم ۱۳۹۵، ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ۱، انتشارات فرناز.
- (۷) رنجبران هادی، چاپ اول ۱۳۹۶، ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت و حسابداری، انتشارات نور علم.
- (۸) غلامی علی اصغر، چاپ اول زمستان ۱۳۸۷، ریاضی عمومی ۱، انتشارات دانشگاه آزاد واحد ساوه.
- (۹) کرایه چیان محمدعلی، چاپ چهارم ۱۳۹۶، ریاضیات مقدماتی، انتشارات آهنگ قلم.
- (۱۰) دلخوش شمس الملوک، ایرانمنش علی، چاپ هشتم بهمن ۱۳۸۵، ریاضیات پیش دانشگاهی، انتشارات دانشگاه پیام نور.